PREPÁRATE

SESIÓN 1

Razonamiento Matemático

Números y operaciones I

Este Curso de Razonamiento Matemático es un producto desarrollado por el Programa Nacional de Becas y Crédito Educativo (Pronabec). Está compuesto por adaptaciones de los guiones de los recursos audiovisuales, difundidos a través de la televisión nacional TV Perú y el canal de YouTube de PerúEduca, de La Pre Aprendo en Casa del Ministerio de Educación del Perú (Minedu).

PRONABEC

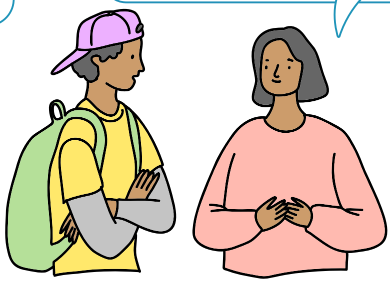
PERÚ Ministerio de Educación

Actividad: Resolvemos situaciones con números y operaciones mediante el uso de diversas estrategias

Números y operaciones I

Hola, ¿tú sabías que los incas tenían conocimiento del sistema decimal y que por medio de los quipus llevaban la contabilidad del Imperio?

Sí, los llamados quipucamayoc eran los intérpretes y los que se encargaban de registrar todas las cuentas y estadísticas.
¡Qué interesante! Justo el tema que vamos a tratar está relacionado con el sistema decimal que utilizamos en las diversas operaciones.



La matemática y el razonamiento matemático se aplican a diversos campos del conocimiento humano. En efecto, constituyen una ayuda indispensable para todos los profesionales de la economía, la biología, la física, la química y otras ramas, así como también para los profesionales de las letras, la música y del arte en general.

La matemática tiene como función básica proporcionar una estructura lógica al pensamiento y servir como herramienta para resolver situaciones de la vida diaria. Estudiar matemática es comprender, relacionar conceptos y aplicarlos en el estudio de magnitudes y cantidades, que están presentes en todos los aspectos de la vida. Ahí radica la importancia de estudiarla ya que fortalece el pensamiento numérico, lógico y espacial.

Una parte de la matemática es la aritmética. Por ello, en esta sesión, desarrollarás algunas estrategias y temas que te servirán de base para reforzar tu práctica operativa y resolver problemas relacionados con operaciones en los diversos sistemas numéricos.

Recordamos los conceptos básicos

Sistema decimal

La base del sistema decimal es 10, lo que significa que 10 unidades de un orden cualquiera constituyen una unidad en el orden inmediato superior y viceversa.

Operación matemática

Llamamos así a un procedimiento que transforma cantidades en otras por medio de reglas o leyes que se establecen previamente.

Ejemplo

Efectuar lo siguiente:

$$(4 + 5 - 16)\left(\sqrt[3]{216} - 5^2\right) - \left(\sqrt{923 - 543}\right)^0$$

a. ¿Qué procesos y operaciones tienes que poner en práctica para resolver el ejercicio?

b. Comprueba si el resultado correcto es 132.

Operador matemático

Es el símbolo que representa una operación matemática mediante una regla de definición.

Presentamos aquí dos cuadros: el de la izquierda, con operadores conocidos y el de la derecha, con otros operadores, es decir, los no convencionales.

Operador	Operaciones
+	Adición
-	Sustracción
x	Multiplicación
/	División
√	Radicación

Otros operadores	
*	Operador asterisco
□	Operador cuadrado
◊	Operador diamante
@	Operador arroba
#	Operador grilla

Es posible crear una operación desconocida con cualquier símbolo determinado. Para ello, se debe crear una regla de formación utilizando operaciones básicas conocidas.

Ejemplo

Si $a\#b = (a^b - 5)(b^a + 3)$, hallar $R = (2\#1) - (4\#0)$.

Reemplazamos las letras por los valores numéricos y resolvemos las operaciones indicadas.

Recuerda algunas propiedades de la potenciación y las leyes de signos.

$$R = (2^1 - 5)(1^5 + 3) - (4^0 - 5)(0^4 + 3)$$

$$R = (2 - 5)(1 + 3) - (1 - 5)(0 + 3) = (-3)(4) - (-4)(3) = (-12) - (-12) = 0$$

Puedes proponer otras situaciones en donde se utilicen diversos operadores y múltiples operaciones combinadas.

Operadores conocidos y operadores no convencionales. Adaptado de "Actitud matemática", por Alfonso Rojas, 2005.

Estrategias heurísticas

Son aquellas herramientas o procedimientos que nos permiten organizar la información para contribuir a la búsqueda de solución o soluciones frente a situaciones problemáticas. A continuación, mencionaremos algunas de ellas:

Diagramas tabulares (tablas)

Se emplean cuando se brinda información sobre características que relacionan dos grupos. También se usan en problemas sobre edades o de proporcionalidad en los que se debe buscar algún patrón o regla de formación.

Ejemplo

Halla el resultado de M = $a^2 + b$, teniendo en cuenta los datos consignados en la siguiente tabla:

$\sqrt{36} - 5^0$	a	b	11
125	343	$3^4 \times 3^2$	1331

¿Cuál es la relación que puedes establecer entre las dos filas de números?
¿Cuál es el resultado de M?

Ensayo y error

Tantear es una estrategia muy útil cuando se lleva a cabo de forma organizada y evaluando cada vez los ensayos que se realizan. En realidad, algunos métodos específicos de solución, como el de regulación o el de aproximaciones sucesivas, se basan en el carácter sistemático de numerosos ensayos y sus respectivas correcciones. La idea es que cada rectificación conduzca a un ensayo que se acerque más a la respuesta.

Método de Pólya

También te damos a conocer el método de Pólya para resolver problemas, el cual considera los siguientes pasos:

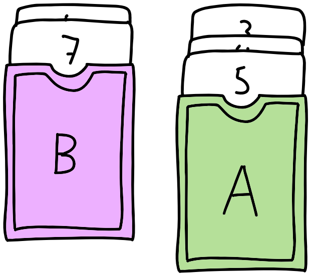
- Comprender el reto o problema.
- Diseñar una estrategia o plan de acción.
- Ejecutar la estrategia o plan.
- Reflexionar sobre la solución.

Situaciones problemáticas

Aquí te planteamos algunos ejemplos de situaciones donde se aplican las estrategias mencionadas y las técnicas operativas correspondientes.

Situación problemática 1

Mario tiene dos cajas. La caja A contiene tres cartas marcadas con los números 3, 4 y 5. La caja B también contiene tres cartas, pero marcadas con los números 6, 7 y 8. Si Mario extrae una carta de cada caja y se suman sus valores, ¿cuántas sumas diferentes son posibles?[1]



A) 5
B) 6
C) 7
D) 8
E) 9

Solución

Tenemos los siguientes datos:

— Valores de las cartas en la caja A: 3; 4 y 5

— Valores de las cartas en la caja B: 6; 7 y 8

Analizamos lo que nos piden: "¿Cuántas sumas diferentes son posibles?".

Elaboramos una tabla de doble entrada y organizamos los valores de la caja A y de la caja B. Luego, sumamos los valores para conocer cuántas sumas diferentes son posibles.

Observamos que hay cinco sumas diferentes: 9; 10; 11; 12 y 13.

[1] Centro Preuniversitario de la PUCP. (marzo, 2019). *Simulacro de examen de admisión.* Ceprepuc.

Diagrama de tablas

+	3	4	5
6	9 ✓	10 ✓	11 ✓
7	10 ✗	11 ✗	12 ✓
8	11 ✗	12 ✗	13 ✓

También puedes utilizar otra estrategia: el diagrama del árbol. Esta te permitirá deducir las cinco sumas diferentes.

Diagrama de árbol

$$3 \begin{cases} \to 6 = 9 \\ \to 7 = 10 \\ \to 8 = 11 \end{cases} \qquad 4 \begin{cases} \to 6 = 10 \\ \to 7 = 11 \\ \to 8 = 12 \end{cases} \qquad 5 \begin{cases} \to 6 = 11 \\ \to 7 = 12 \\ \to 8 = 13 \end{cases}$$

Respuesta A

Situación problemática 2

El producto de dos números positivos, enteros y consecutivos es 1560. Halla la suma de dichos números.[2]

A) 77
B) 79
C) 81
D) 83
E) 85

[2] Centro Preuniversitario de la PUCP. (marzo, 2019). *Simulacro de examen de admisión*. Ceprepuc.

Solución

Tenemos los siguientes datos:

— Dos números positivos, enteros y consecutivos, simbolizados por x y y

— Producto: $x \cdot y = 1560$

Analizamos lo que nos piden:

"Halla la suma de los dos números positivos, enteros y consecutivos".

Utilizamos la estrategia de ensayo y error:

Si la suma fuese 81, como se indica en la alternativa C), los números podrían ser 40 y 41, cuyo producto termina en 0.

Simbólicamente.

Si $x + y = 81 \rightarrow x = 40; y = 41$

Comprobamos: $(40)(41) = 1640$. Observamos que $1640 > 1560$.

Probamos con $x = 40$

Probamos con $y = 39$

Si $x + y = 79 \rightarrow 40 + 39 = 79$

Comprobando: $(40)(39) = 1560$.

Por lo tanto, la suma de los dos números positivos, enteros y consecutivos es 79.

Respuesta B

Situación problemática 3

Abel tiene un saco con 110 kg de avena, una balanza de dos platillos y cuatro pesas de 8 kg, 14 kg, 20 kg y 24 kg, respectivamente. Para obtener exactamente 84 kg de avena, ¿cuántas veces mínimamente debe pesar en la balanza Abel?

A) 2
B) 4
C) 3
D) 1
E) 5

Solución

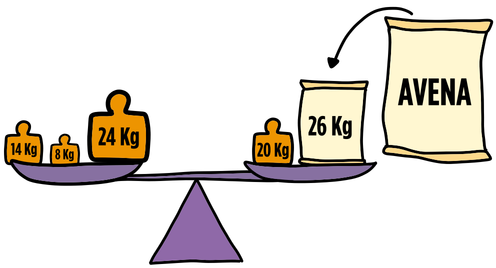
Tenemos los siguientes datos:

— Saco de avena: 110 kg
— Cuatro pesas: 8 kg, 14 kg, 20 kg y 24 kg

Analizamos lo que nos piden: "Para obtener exactamente 84 kg de avena, ¿cuántas veces mínimamente debe pesar en la balanza Abel?".

Para obtener 84 kg: 110 – 84 = 26 kg

Si pesa 8 kg, 14 kg y 24 kg en el primer platillo, y 20 kg en el segundo platillo, necesitará extraer avena de los 110 kg para equilibrar la balanza.



8 + 14 + 24 = 20 + 26

Abel pesa en la balanza mínimo una vez.

Respuesta D

Retos

Los retos son los desafíos que te impulsarán a desarrollar tus propias estrategias y permitirán verificar tus logros de aprendizaje. Para ello, tendrás que leer bien la situación (problema o ejercicio), comprenderla, analizar los datos, trazar un plan de acción y realizar las operaciones para comprobar luego el resultado. ¡Éxitos en tu proceso de aprendizaje!

Reto 1

Se define la operación[3]:

a @ b = a . b + a – b. Halla el valor de x:

x = (3 @ 4) – (2 @ 6)

A) -1
B) 1
C) 3
D) 4
E) 2

Reto 2

Si el 30 de agosto de cierto año bisiesto fue sábado, ¿qué día de la semana será el 25 de diciembre de ese mismo año?[4]

A) sábado
B) domingo
C) martes
D) jueves
E) miércoles

[3] Centro Preuniversitario de la PUCP. (marzo, 2019). *Simulacro de examen de admisión*. Ceprepuc.
[4] Centro Preuniversitario de la UNMSM. (2019). *Simulacro de examen de admisión*. Cepreunmsm.

Reto 3

Al simplificar $\frac{546}{168}$, se obtiene la fracción irreductible $\frac{a}{b}$

Hallar el valor de $R = \frac{a - b}{b + 2}$

A) 1/2
B) 1/4
C) 3/2
D) 3/4
E) 2/3

Reto 4

Si se calcula el producto de todos los números naturales del 1 al 50, ¿en cuántos ceros acaba el resultado?

A) 12
B) 11
C) 10
D) 13
E) 15

Reto 5

En un colegio se ha organizado un partido de básquet. En cada equipo hay siempre 5 jugadores en la cancha y 3 jugadores en la banca de suplentes; además, se sabe que cualquier jugador de la cancha puede ser sustituido por uno de la banca y está permitido el reingreso. Al final del partido, el entrenador de uno de los equipos se da cuenta de que todos sus jugadores han jugado exactamente el mismo tiempo. Si el partido duró 48 minutos, ¿cuántos minutos jugó cada uno de los jugadores del equipo?[5]

A) 20
B) 25
C) 30
D) 36
E) 22

[5] Centro Preuniversitario de la PUCP. (marzo, 2019). *Simulacro de examen de admisión*. Ceprepuc.

Resolvemos los retos

Reto 1

Presentamos la operación definida por el operador arroba.

a @ b = a . b + a − b

Analizamos lo que nos piden: "Halla el valor de x".

x = (3 @ 4) − (2 @ 6)

Calculamos por separado (3 **@** 4) y (2 **@** 6).

a @ b = a . b + a − b
3 @ 4 = (3)(4) + 3 − 4
3 @ 4 = 11

Calculamos (2 **@** 6).

a @ b = a . b + a − b
2 @ 6 = (2)(6) + 2 − 6
2 @ 6 = 8

Reemplazamos los valores y obtenemos el valor de *x*.

x = (3 @ 4) − (2 @ 6)
x = (11) − (8)
x = 3

Respuesta C

Reto 2

Sabemos que el 30 de agosto fue sábado.

Analizamos lo que nos piden: "¿Qué día de la semana será el 25 de diciembre de ese mismo año?". Elaboramos una tabla que indique los meses y días entre el 30 de agosto y el 25 de diciembre.

Mes	Días
Agosto	1
Setiembre	30
Octubre	31
Noviembre	30
Diciembre	25
Total	**117**

Si la semana tiene 7 días, dividimos 117 / 7 = 112, y queda un residuo de 5.

Si el 30 de agosto fue sábado, 5 días después fue jueves.

Respuesta D

Reto 3

Para hallar la fracción irreductible de $\frac{546}{168}$, simplificamos.

$$\frac{546}{168} = \frac{273}{84} = \frac{91}{28} = \frac{13}{4}$$

La fracción irreductible

$$\frac{a}{b} = \frac{13}{4}$$

Figura 2. Operadores conocidos y operadores no convencionales. Adaptado de "Actitud matemática", por Alfonso Rojas, 2005.

Reemplazamos:

$$R = \frac{a - b}{b + 2} = \frac{13 - 4}{4 + 2} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

Respuesta C

Reto 4

Calculamos el número de ceros en que termina el siguiente producto:

(1)(2)(3)(4)(5)...(9)(10)(11)...(19)(20)...(49)(50)

Para ello, debemos recordar que si un número termina en 0, quiere decir que en su descomposición en factores primos están el el 2; el 5 y otros que también los contienen, como 10; 20; 30; etc.

Aplicamos una regla práctica para calcular: dividimos el último número de la serie entre 5 y el cociente resultante entre 5, y así sucesivamente hasta que el cociente sea menor que 5.

50 / 5 = 10; 10 / 5 = 2

Por consiguiente, 10 + 2 = 12.

Luego, se suman los cocientes obtenidos y ese será el número total de factores de 5 y el número de ceros que tiene dicho producto.

Respuesta A

Reto 5

Determinamos los datos:

— Número de jugadores en el campo: 5

— Número de jugadores en la banca: 3

Analizamos lo que nos piden: "¿Cuántos minutos jugó cada uno de los jugadores del equipo?".

Si durante el partido solo hubieran jugado 5 jugadores y el partido duró 48 minutos, entonces entre los cinco jugaron 240 minutos.

$$(5)(48) = 240$$

Si todos jugaron, entonces el total de minutos se distribuye entre todo el equipo (jugadores en la cancha y en la banca).

$$240 / 8 = 30$$

Cada uno jugó 30 minutos.

Respuesta C

Para complementar tu preparación puedes consultar tus libros de matemática, buscar fuentes confiables en internet, formar tu círculo de estudio o compartir tus avances con tus compañeras y compañeros.

Curiosidades

Algunos cuadrados de números enteros son tales que si se invierten las cifras de su base, también se invierten las de su cuadrado.

$12^2 = 144$ y $21^2 = 441$

$102^2 = 10\,404$ y $201^2 = 40\,401$

Hay otros números más, ¿podrías hallarlos?

PREPÁRATE

SESIÓN
2

Razonamiento Matemático

Números y operaciones II: Fracciones

PRONABEC

PERÚ Ministerio de Educación

Actividad: Resolvemos situaciones o retos que involucren el uso de números fraccionarios

Números y operaciones II: Fracciones

A veces, en el campo de los números enteros, no son posibles ciertas operaciones como, por ejemplo, en algunos casos, la división de enteros. En efecto, si no se cumple la condición de que el dividendo es múltiplo del divisor, la división entre enteros no tiene solución posible en el conjunto Z, por lo que se necesita ampliar el concepto de número entero y pasar al concepto de número racional (Q). La forma usual de representación de un número racional es una fracción.

En la resolución de problemas de medidas de longitudes, superficies, volúmenes, porcentajes, etc., se utilizan las fracciones. Por ello, es importante conocer sus propiedades y las técnicas operativas correspondientes.

En esta sesión se plantearán situaciones en las cuales se aplicarán dichos conocimientos y nuevas estrategias de resolución.

Incursionemos en el maravilloso mundo de los números racionales con mucho optimismo y deseos de superación. Muchos éxitos para todas y todos los jóvenes.

Recordamos los conceptos básicos

Fracción

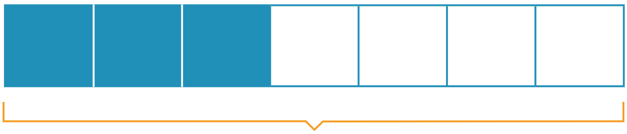
Es la relación entre dos términos: uno de ellos, llamado denominador, nos indica las partes en que se ha dividido una determinada unidad; y el otro, llamado numerador, nos indica las partes que tomamos de esa división.

Notación:

$$\begin{array}{r} \text{Numerador} \longrightarrow \\ \text{Denominador} \longrightarrow \end{array} \frac{a}{b};\ b \neq 0$$

Representación gráfica:

$\frac{3}{7}$; $7 \neq 0$



1 = unidad

Clasificación de fracciones:

1. **Fracción propia e impropia**

$\frac{a}{b} < 1 \rightarrow a < b$ $\qquad$ $\frac{a}{b} > 1 \rightarrow a > b$

2. **Ordinaria y decimal**

$\frac{9}{4}; \frac{3}{11}; \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{7}{10}; \frac{13}{100}; \frac{19}{1000}$

3. **Homogéneas y heterogéneas**

$\frac{2}{7}; \frac{5}{7}$ $\qquad$ $\frac{3}{11}; \frac{4}{9}$

4. **Reductible e irreductible**

$\frac{14}{721} = \frac{2}{103}$ $\qquad$ $\frac{5}{7}; \frac{9}{11}; \frac{4}{9}; \frac{7}{3}$

Fracciones equivalentes

Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes si se cumple que *a.d* = *b.c*

Propiedad fundamental de las fracciones

Si el numerador y el denominador de una fracción se multiplican o dividen por un mismo número, el valor de la fracción no varía.

Números racionales

Son aquellos que expresan una relación de división o de razón entre dos números enteros. También se les llama números fraccionarios.

Se simboliza por la letra Q al conjunto de los números racionales.

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \; / \; a, b \in Z, b \neq 0 \right\}$$

Estrategias de resolución

Producto cruzado en caso de adición o sustracción de dos fracciones

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{\boxed{(a \times d)} - \boxed{(b \times c)}}{\boxed{b \times d}}$$

Ejemplos

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{7} = \frac{21 + 10}{35} = \frac{31}{35}$$

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{7} = \frac{35 - 6}{42} = \frac{29}{42}$$

Simplificación en el producto de fracciones

Ejemplos

$$\frac{\overset{\overset{2}{\cancel{6}}}{\cancel{12}}}{\underset{5}{\cancel{10}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{\underset{1}{\cancel{3}}}{\cancel{15}}} = \frac{2}{5}$$

Fórmula para casos especiales

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_1} \pm \frac{1}{T_2} \pm \ldots \pm \frac{1}{T_n}$$

Método para la resolución de retos o problemas

- Comprendemos el reto o problema.
- Diseñamos una estrategia o plan.
- Ejecutamos la estrategia o plan.
- Reflexionamos sobre la solución.

Situaciones problemáticas

Situación problemática 1

Dadas las fracciones:

$$\frac{2}{3};\frac{4}{9};\frac{7}{4};\frac{10}{11};\frac{6}{15}$$

¿Qué se puede afirmar?[1]

A) Son propias, irreductibles y homogéneas
B) Son solo propias y heterogéneas
C) Son solo irreductibles y heterogéneas.
D) Son solo heterogéneas.
E) Son equivalentes.

Solución

Analizamos las fracciones de acuerdo con sus características.

$$\frac{2}{3};\frac{4}{9};\frac{7}{4};\frac{10}{11};\frac{6}{15}$$

- Observamos la fracción $\frac{7}{4}$, donde $7 > 4$. No es una fracción propia.
- Observamos la fracción $\frac{6}{15}$, que es posible de simplificar al dividir entre 3. No es una fracción irreductible.
- Al observar los denominadores, todos son diferentes; por ello, son fracciones heterogéneas.
- Al observar las fracciones vemos que estas no son equivalentes.

Entonces, se puede afirmar que las fracciones son solo heterogéneas.

Respuesta D

[1] Centro Preuniversitario de la PUCP. (septiembre, 2019). *Simulacro de examen de admisión*. Ceprepuc.

Situación problemática 2

Lucas gasta los 2/3 de su dinero, luego los 3/5 de lo que le queda y, finalmente, los 3/4 del nuevo resto. ¿Qué fracción de su dinero ha gastado?[2].

A) 1/30
B) 3/10
C) 29/30
D) 7/10
E) 30/29

Solución

Leemos la situación planteada y analizamos los datos.

Total de dinero: x
Fracción que gasta: ?

Calculamos la suma de los gastos y restos. Para ello, elaboramos una tabla con los datos y los procesos obtenidos.

Gastos	Suma de gastos	Resto
Primero: $\frac{2}{3}x$	$= \frac{2}{3}x$	$\frac{1}{3}x$
Segundo: $\frac{3}{5}\left(\frac{1}{3}x\right) = \frac{1}{5}x$	$= \frac{1}{5}x + \frac{2}{3}x = \frac{13}{15}x$	$\frac{2}{15}x$
Tercero: $\frac{3}{4}\left(\frac{2}{15}x\right) = \frac{1}{10}x$	$= \frac{1}{10}x + \frac{13}{15}x = \frac{145}{150}x$	$\frac{5}{150}x$

[2] Centro Preuniversitario de la PUCP. (marzo, 2019). *Simulacro de examen de admisión*. Ceprepuc.

Calculamos la fracción de dinero gastado.

$$\frac{145}{150} = \frac{29}{30}$$

Por lo tanto, la fracción de dinero gastado es 29/30.

Respuesta A

Situación problemática 3

Los 4/5 de los miembros de un club son mujeres y los 3/4 de los hombres están casados. Si hay 10 hombres solteros, ¿cuántas mujeres hay en total?[3]

A) 100
B) 140
C) 120
D) 160
E) 150

Solución

Analizamos los datos.

Total de miembros del club: x

$$M = \frac{4}{5}x \qquad H = \frac{1}{5}x$$

Hombres solteros = 10
$M = ?$

Si los hombres casados son $\frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}x\right)$

Entonces, los hombres solteros son $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}x\right)$

Calculamos el total de miembros del club.

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}x\right) = 10 \qquad \frac{1}{20}x = 10 \qquad x = 200$$

[3] Centro Preuniversitario de la PUCP. (marzo, 2019). *Simulacro de examen de admisión.* Ceprepuc.

Obtenemos el total de mujeres.

$$M = \frac{4}{5}x = \frac{4}{5}(200) = 160$$

El total de mujeres es 160.

Respuesta D

Situación problemática 4

Un depósito puede ser llenado por el tubo A en 2 horas y por el tubo B en 3 horas. Además, puede ser vaciado por un desagüe en 4 horas. Calcula en cuánto tiempo se llenará el depósito con los dos tubos y el desagüe abiertos.

A) 1 h
B) 12/7 h
C) 10 h
D) 11/7 h
E) 9 h

Solución

Resolución 1

$Tubo\ A$: $2\ h \rightarrow 1\ h$: $\frac{1}{2}$

$Tubo\ B$: $3\ h \rightarrow 1\ h$: $\frac{1}{3}$

$Desagüe$: $4\ h \rightarrow 1\ h$: $\frac{1}{4}$

Calculamos lo que llena en una hora.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{6 + 4 - 3}{12} = \frac{7}{12}$$

Calculamos en qué tiempo llena el depósito.

$$1\,h \rightarrow \frac{7}{12}$$

$$x\,h \rightarrow 1$$

$$x \rightarrow \frac{1}{\frac{7}{12}} = \frac{12}{7}$$

Resolución 2

Calculamos el tiempo, aplicando la fórmula

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{T} = \frac{7}{12}$$

$$T = \frac{12}{7}$$

Por lo tanto, el depósito se llena en 12/7 horas.

Respuesta B

Retos

Te planteamos algunos retos que te permitirán aplicar tus conocimientos sobre fracciones, así como las técnicas operativas de las mismas. Recuerda los pasos a seguir para resolver un problema.

Reto 1

Se define x de la siguiente forma:

$$x = \frac{448}{550} - \frac{216}{504}$$

¿A cuál de los siguientes intervalos pertenece *x*?[4]

A) [0; 0,1]
B) [0,2 ;0,3]
C) [0,1; 0,2]
D) [0,3; 0,4]
E) [0,4; 0,5]

Reto 2

Belisario gastó 2/3 de su presupuesto para comprar 20 pizarras acrílicas y usó 1/3 del resto en plumones y motas. Si aún le quedan por gastar S/ 1000, ¿cuánto costó cada pizarra acrílica?[5]

A) S/ 100
B) S/ 120
C) S/ 150
D) S/ 200
E) S/ 180

[4] Centro Preuniversitario de la PUCP. (marzo, 2019). *Simulacro de examen de admisión*. Ceprepuc.
[5] Centro Preuniversitario de la PUCP. (abril, 2019). *Simulacro de examen de admisión*. Ceprepuc.

Reto 3

Un recipiente contenía cierta cantidad de chicles. Sara tomó la mitad de los chicles. Luego, Ana se llevó la mitad de los chicles restantes. Más tarde, Antonia tomó la mitad de los chicles que quedaban. Si al final quedaron 99 chicles en el recipiente, ¿cuántos chicles había en el recipiente al inicio?

A) 396
B) 1188
C) 495
D) 792
E) 369

Reto 4

Juan fue de compras y gastó sucesivamente los 2/3; 3/5; 1/2 y 3/10 de lo que iba quedando en cada momento. Si al final se quedó con S/ 35, ¿cuánto tenía al inicio?[6]

A) S/ 1500
B) S/ 150
C) S/ 750
D) S/ 350
E) S/ 1050

[6] Centro Preuniversitario de la PUCP. (setiembre, 2019). *Simulacro de examen de admisión*. Ceprepuc.

Reto 5

Dos toneles contienen 810 L de aceite en total. Si se extraen 2/9 del primero y 1/3 del segundo, quedarían 176 L más en el segundo que en el primero. ¿Cuánto contiene el segundo tonel?[7]

A) 261 L
B) 342 L
C) 459 L
D) 558 L
E) 324 L

Reto 6

Durante la elección de la junta directiva de una cooperativa de vivienda, la tercera parte de los electores votó por el partido A, la sexta parte por el partido B y los 5/12 por el partido C. Si los 60 restantes votaron en blanco, ¿cuántos votantes participaron en dicha elección?

A) 500
B) 590
C) 620
D) 720
E) 520

[7] Centro Preuniversitario de la PUCP. (setiembre, 2019). *Simulacro de examen de admisión*. Ceprepuc.

Resolvemos los retos

Reto 1

Simplificamos las fracciones por separado.

$$x = \frac{448}{550} - \frac{216}{504}$$

Obtenemos lo siguiente:

$$x = \frac{4}{5} + \frac{3}{7} = \frac{13}{35}$$

Expresamos con un número decimal la fracción resultante.

Recuerda que para convertir una fracción a decimal solo se divide el numerador entre el denominador.

$$\frac{13}{35} = 0{,}371... \qquad 0{,}3 < 0{,}371... < 0{,}4$$

Entonces, el número 0,371... pertenece al intervalo [0,3; 0,4].

Respuesta D

Reto 2

Presupuesto: x

Gasta en:

20 *pizarras*: $\frac{2}{3}x \rightarrow$ *resto*: $\frac{1}{3}x$

Plumones y motas: $\frac{1}{3}x \rightarrow$ *quedan*: $\frac{2}{3}$ *del resto*

Resto total: S/ 1000

Calculamos el resto de los gastos sucesivos.

$$\textit{Resto}: \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x\right) = \frac{2}{9}x$$

Calculamos el presupuesto.

$$\frac{2}{9}x = 1000 \qquad\qquad x = 4500$$

Calculamos el costo de cada pizarra acrílica.

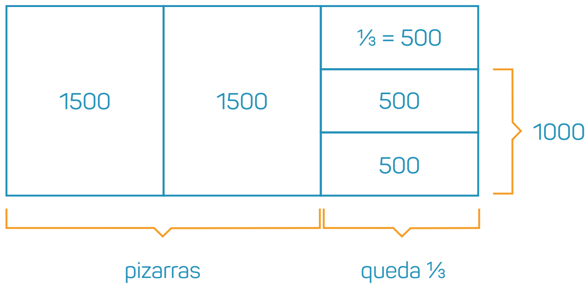
$$20\ \textit{pizarras}: \frac{2}{3}x = \frac{2}{3}(4500) = 3000$$

Costo de cada pizarra:

$$3000 / 20 = 150$$

Por lo tanto, cada pizarra costó S/ 150.

Este problema también se puede resolver gráficamente como se muestra a continuación.



El rectángulo representa el total del presupuesto. Luego, se divide el rectángulo en 3 partes, se toman dos para las pizarras y la otra parte se vuelve a dividir en 3 para representar las otras compras y el dinero que sobra. Luego, se deducen los valores de cada parte dividida.

Respuesta C

Reto 3

Total de chicles: x

Sara, Ana y Antonia tomaron $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$ de lo que iba quedando.

Resto: 99

Calculamos el resto total.

$$Resto: \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\right)\right] = \frac{1}{8}x$$

Si quedaron 99 chicles, calculamos el total de chicles que había al inicio.

$$\frac{1}{8}x = 99 \qquad\qquad x = 792$$

En el recipiente había 792 chicles inicialmente.

Respuesta D

Reto 4

Dinero inicial de Juan: x

Gastó sucesivamente $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{10}$ de lo que iba quedando.

Calculamos el resto.

$$Resto: \frac{7}{10}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}x\right)\right]\right\} = \frac{7}{150}x$$

Calculamos el dinero inicial, si el resto final es de S/ 35.

$$\frac{7}{150}x = 35 \qquad\qquad x = 750$$

Por lo tanto, Juan tenía al inicio S/ 750.

Respuesta C

Reto 5

Tonel 1: x
Tonel 2: y

$$x + y = 810 \text{ L}$$

Al extraer en cada uno, queda:

Tonel 1 → $\frac{2}{9}x$; queda: $\frac{7}{9}x$

Tonel 2 → $\frac{1}{3}y$; queda: $\frac{2}{3}y$

Si el tonel 2 tiene 176 L más que el tonel 1, se tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{2(3)}{3(3)}y - \frac{7}{9}x = 176 \rightarrow 6y - 7x = 176(9)$$

Calculamos el volumen del tonel 2 aplicando sistemas de ecuaciones.

$$\begin{cases} 6y - 7x = 1584 & (1) \\ y + x = 810 & (2) \end{cases}$$

Despejamos x en la ecuación (2).

$$x = 810 - y$$

Reemplazamos el valor de x en la ecuación (1).

$$6y - 7(810 - y) = 1584$$

$$6y + 7y = 1584+5670$$

$$13y = 7254$$

$$y = 558$$

Entonces, el segundo tonel contiene 558 L.

Respuesta D

Reto 6

Votaron por los partidos A, B y C: $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{5}{12}$

Total de votantes: 12x

En blanco: 60

Calculamos la cantidad de personas que votaron.

$$A= \frac{3}{9}\,(12x) = 4x$$

$$B= \frac{1}{6}\,(12x) = 2x$$

$$C= \frac{5}{12}\,(12x) = 5x$$

El total de votantes es $4x + 2x + 5x = 11x$.

Entonces, votaron en blanco x.

$$x= 60$$

Obtenemos el total de votantes.

$$12x= 12(60) = 720$$

Participaron en la elección 720 votantes.

Respuesta D

Curiosidades

Hay algunas fracciones que al simplificarlas tienen características especiales como las siguientes:

$$\frac{1999}{9995} = \frac{199}{995} = \frac{19}{95} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{1666}{6664} = \frac{166}{664} = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

¿Existirán otras fracciones cuyas cifras sean iguales? ¿Podrías dar algún ejemplo y justificar tu respuesta?

PREPÁRATE

SESIÓN
3

Razonamiento Matemático

Números y operaciones III: Divisibilidad

PRONABEC

PERÚ Ministerio de Educación

Actividad: Resolvemos situaciones que involucren la aplicación de la divisibilidad

Números y operaciones III: Divisibilidad

Muchos matemáticos, físicos y científicos han calificado a la matemática como "la reina de las ciencias" y a la teoría de los números como "la reina de la matemática". Pero ¿de qué se ocupa la teoría de los números? Se ocupa, básicamente, de las cuestiones que giran en torno a la divisibilidad y a sus temas relacionados (números primos, máximo común divisor, mínimo común múltiplo).

En muchas situaciones de nuestra vida diaria tenemos que realizar algún proceso de reparto o distribución de cantidades de diversas magnitudes entre entidades de distinta naturaleza, de manera que a cada una le corresponda una misma cantidad. Esto nos lleva a aplicar un concepto matemático como la divisibilidad y los criterios referidos a ella.

En esta sesión se plantearán situaciones en las que tendrás la oportunidad de trabajar con relaciones numéricas que te permitirán formar y desarrollar un tipo de pensamiento mucho más reflexivo y analítico, el cual utilizarás para resolver los diversos problemas que se presenten en tu proyecto de vida.

Recordamos los conceptos básicos

Divisibilidad

Un número entero A es divisible entre otro número entero positivo B si A se divide exactamente entre B.

Multiplicidad

Un número entero A es múltiplo de un número entero positivo B si A es el resultado de multiplicar B por una cantidad entera.

Criterios de divisibilidad

A continuación, se presenta un cuadro con los criterios de divisibilidad:

Criterios de divisibilidad entre potencias de 2	$\overline{abcde} = \overset{\circ}{2} \longleftrightarrow e = \overset{\circ}{2}$ $\overline{abcde} = \overset{\circ}{4} \longleftrightarrow de = \overset{\circ}{4}$ $\overline{abcde} = \overset{\circ}{8} \longleftrightarrow cde = \overset{\circ}{8}$
Criterios de divisibilidad entre 3	$\overline{abcd} = \overset{\circ}{3} \longleftrightarrow a + b + c + d = \overset{\circ}{3}$
Criterios de divisibilidad entre 9	$\overline{abcd} = \overset{\circ}{9} \longleftrightarrow a + b + c + d = \overset{\circ}{9}$
Criterios de divisibilidad entre 7	$\overset{1231231}{\overline{abcdefg}} = \overset{\circ}{7} \longleftrightarrow a - 2b - 3c - d + 2e + 3f + g = \overset{\circ}{7}$
Criterios de divisibilidad entre 11	$\overset{+-+-+}{\overline{abcde}} = \overset{\circ}{11} \longleftrightarrow a + b + c - d + e = \overset{\circ}{11}$
Criterios de divisibilidad entre 13	$\overset{1431431}{\overline{abcdefg}} = \overset{\circ}{13} \longleftrightarrow a + 4b + 3c - d - 4e - 3f + g = \overset{\circ}{13}$
Criterios de divisibilidad entre potencias de 5	$\overline{abcde} = \overset{\circ}{5} \longleftrightarrow e = 0 \text{ o } 5$ $\overline{abcde} = \overset{\circ}{25} \longleftrightarrow de = \overset{\circ}{25}$ $\overline{abcde} = \overset{\circ}{125} \longleftrightarrow cde = \overset{\circ}{125}$

Ecuaciones diofánticas o diofantinas

Una ecuación diofántica o ecuación diofantina es una ecuación algebraica de dos o más variables, cuyos coeficientes son números enteros, que busca soluciones enteras o naturales.

Notación: $ax + by = c$, donde a,b y $c \in Z$

Existe una condición para que esta ecuación tenga solución: que el máximo común divisor de a y b divida a c.

Números primos

Son aquellos que solo son divisibles por sí mismos y por la unidad.

Números compuestos

Son aquellos que no son primos.

Descomposición canónica de un número

Es el proceso que consiste en descomponer un número en sus factores primos. Para ello, se divide dicho número entre la serie natural de números primos aplicando criterios de divisibilidad.

Ejemplo

$$1240 = 2^3 \times 5 \times 31$$

Donde 2; 5 y 31 son números primos.

Cantidad de divisores de un número

Si la descomposición canónica del número es $N = A^a \,.\, B^b \,.\, C^c$, entonces $CD(N) = (a+1)\,(b+1)\,(c+1)...$

Donde

N → número entero

A, B, C → factores primos de N

a, b, c → exponentes de los factores primos

CD(N) → cantidad de divisores de N

Ejemplo

Calculamos el número total de divisores de 200.

Descomponemos 200 en sus factores primos.

$$200 = 2^3 \times 5^2$$

Aplicamos la fórmula.

$$CD\,(200) = (3 + 1)(2 + 1) = (4)(3) = 12$$

Luego, la cantidad total de divisores de 200 es 12.

Situaciones problemáticas

Situación problemática 1

¿Qué números de tres cifras son múltiplos de 12 y terminan en 12? Calcula la suma de estos números.

A) 912
B) 1224
C) 1524
D) 1836
E) 1254

Solución

Representamos simbólicamente.

$\overline{abc} = 12°$

$\overline{a12} = 12°$

Suma de los números: ?

Los múltiplos de 12 son múltiplos de 3 y de 4 a la vez.

Entonces, $\overline{a12}$ es múltiplo de 4 porque sus dos últimas cifras son múltiplos de 4.

Calculamos los valores de a para que $\overline{a12}$ sea 3.

$a + 1 + 2 = 3 \quad \rightarrow \quad a = 3; \; a = 6; \; a = 9$

Obtenemos los tres números reemplazando el valor de *a*.

$\overline{a12} = 312$

$\overline{a12} = 612$

$\overline{a12} = 912$

Procedemos a sumar.

$312 + 612 + 912 = 1836$

Respuesta D

Situación problemática 2

A un congreso asistieron entre 100 y 200 médicos, de los cuales los 2/7 son cirujanos y los 5/11 son ginecólogos. ¿Cuántos médicos asistieron en total?

A) 80
B) 140
C) 110
D) 190
E) 154

Solución

Cantidad de asistentes: N

$100 < N < 200$

Cirujanos: $\dfrac{2}{7} \rightarrow N = \overset{\circ}{7}$

Ginecólogos: $\dfrac{5}{11} \rightarrow N = \overset{\circ}{11}$

Aplicamos la propiedad de los múltiplos.

Donde N debe ser un múltiplo de 7 y de 11

$N = \overline{\text{MCM}(\overset{\circ}{7}; \overset{\circ}{11})} = \overset{\circ}{77}$

$100 < \overset{\circ}{77} < 200$

Buscamos los múltiplos de 77 entre 100 y 200.

El resultado es $N=154$.

Respuesta E

Situación problemática 3

Andrea tiene menos de 70 años. Su edad es un número que tiene dos dígitos y es divisible por 3; 5 y 9. Halle la diferencia entre el mayor y el menor de los dígitos de dicho número[1].

A) 1
B) 5
C) 3
D) 9
E) 4

Solución

Edad de Andrea: $\overline{ab} < 70$

Aplicamos la propiedad de los múltiplos.

$\overline{ab}$ debe ser múltiplo de $\overset{\circ}{3}; \overset{\circ}{5}; \overset{\circ}{9}$

Aplicamos la propiedad de los múltiplos.

$\overline{ab} = \overline{\text{MCM}(\overset{\circ}{3},\overset{\circ}{5},\overset{\circ}{9})}$

$\overline{ab} = \overset{\circ}{45}$

[1] Centro Preuniversitario de la PUCP. (septiembre, 2019). *Simulacro de examen de admisión 2*. Ceprepuc.

El único que cumple es el número 45. Esto se explica porque 45 < 70.

Calculamos la diferencia entre el mayor y el menor dígito de 45.

$5 - 4 = 1$

Respuesta A

Situación problemática 4

Halla el valor de n para que el número de divisores de N = 30n sea el doble de divisores de M = 15 x 18^n.

A) 5
B) 6
C) 7
D) 8
E) 9

Solución

Descomponemos N y M en sus factores primos.

$N = 30^n = (2^n)(3^n)(5^n)$

$M = (15)(18^n) = (3)(5)(2^n)(3^{2n})$

$M = (3^{2n+1})(2^n)(5)$

Calculamos la cantidad de divisores de N.

$CD(N) = (n + 1)^3$

Calculamos la cantidad de divisores de M.

$CD(M) = (2n + 2)(n + 1)(1 + 1)$

$CD(M) = 2(n + 1)(n + 1)(2) = 4(n+1)^2$

Planteamos la ecuación con CD(N) y CD(M) para obtener el valor de n.

$$CD(N) = 2CD(M)$$

$$(n + 1)^3 = 2\left[4(n + 1)^2\right]$$

Si simplificamos, se obtiene lo siguiente:

$$n + 1 = 8$$

$$n = 7$$

Respuesta C

Retos

Los retos son los desafíos que te impulsarán a desarrollar tus propias estrategias y permitirán verificar tus logros de aprendizaje. Para ello, tendrás que leer bien la situación (problema o ejercicio), comprenderla, analizar los datos, trazar un plan de acción y realizar las operaciones para comprobar luego el resultado. ¡Éxitos en tu proceso de aprendizaje!

Reto 1

Al dividir un número N entre 7 se obtiene como residuo 4. Además, al dividir 3N entre 11, también se obtiene como residuo 4. Halla la cantidad de divisores del menor valor posible de N^2.

A) 10
B) 12
C) 80
D) 40
E) 120

Reto 2

A una reunión asisten 250 personas. Si del total de varones la quinta parte son abogados; la sexta parte, médicos; y la séptima parte, ingenieros, ¿cuántas mujeres asistieron a dicha reunión?

A) 45
B) 75
C) 15
D) 20
E) 60

[2] Centro Preuniversitario de la PUCP. (septiembre, 2019). *Simulacro de examen de admisión 1*. Ceprepuc.

Reto 3

¿Cuántos números enteros comprendidos entre 800 y 1400 existen de manera que terminen en cifra 3 y sean múltiplos de 19?

A) 4
B) 3
C) 9
D) 8
E) 2

Reto 4

¿Cuál es el menor número que al ser dividido entre 7; 6; 5 o 3 deja como residuo el máximo para cada divisor empleado?

A) 200
B) 209
C) 210
D) 219
E) 229

Reto 5

¿Cuántos ceros se debe colocar a la derecha del número 49 para que el resultado tenga 147 divisores?

A) 2
B) 4
C) 6
D) 7
E) 10

Reto 6

¿Cuántos divisores múltiplos de 12 tiene A si la descomposición canónica de A es $2^4 \times 3^6 \times 5^3$?

A) 60
B) 56
C) 72
D) 75
E) 65

Resolvemos los retos

Reto 1

Dividimos N entre 7.

$N/7 = C_1$ y residuo 4 $\rightarrow N = 7C_1 + 4$

Si multiplicamos N por 3, el resultado es $3N = 21C_1 + 12$ ... (I)

Dividimos 3N entre 11.

$3N/11 = C_2$ y residuo 4 $\rightarrow 3N = 11C_2 + 4$ ... (II)

Igualamos ambas ecuaciones (I) y (II).

$21C_1 + 12 = 11C_2 + 4$

$21C_1 + 8 = 11C_2$

Pero $11C_2$ es múltiplo de 11.

Luego, $22C_1 - C_1 + 8 = 11C_2$

$8 + \overset{\circ}{11} = C_1$

Se sabe que $\overset{\circ}{11} = 0$.

$8 = C_1$

$N = 7(8) + 4$

Por consiguiente, $N = 7(8) + 4$

$N = 60$

$N = (2^2)(3)(5)$

$CD(N) = (3)(2)(2) = 12$

Respuesta B

Reto 2

Total: 250 personas

El total de varones está conformado de la siguiente manera:

Abogados $\rightarrow \overset{\circ}{5}$

Médicos $\rightarrow \overset{\circ}{6}$

Ingenieros $\rightarrow \overset{\circ}{7}$

Aplicamos la propiedad de los múltiplos.

$V= \overline{MCM(\overset{\circ}{5};\overset{\circ}{6};\overset{\circ}{7})}$

$V= \overset{\circ}{210} = 210$

$M=40$

Respuesta D

Reto 3

Calculamos N que representa el número de múltiplos de 19 que hay entre 800 y 1400.

$800 < N < 1400$

$N = \overset{\circ}{19} => 19k$

El valor de k está entre los siguientes valores:

$800 < 19k < 1400$

Dividimos.

$800 / 19 = 42{,}1052...$ y $1400 / 19 = 73{,}6842...$

$42{,}1052... < k < 73{,}6842 ...$

$43 \leq k \leq 73$

Como los N deben terminar en 3, entonces k debe terminar en 7.

Valores de $k = \{47; 57; 67\}$

Luego, son tres números enteros los que cumplen la condición.

Respuesta B

Reto 4

N → menor número, entero positivo

Obtenemos los múltiplos de N con el mayor y menor residuo.

$\overset{\circ}{7} + 6$ y $\overset{\circ}{7} - 1$

$\overset{\circ}{6} + 5$ y $\overset{\circ}{6} - 1$

$\overset{\circ}{5} + 4$ y $\overset{\circ}{5} - 1$

$\overset{\circ}{3} + 2$ y $\overset{\circ}{3} - 1$

Aplicamos la propiedad de los múltiplos.

$\overline{\text{MCM}\,(\overset{\circ}{3}; \overset{\circ}{5}; \overset{\circ}{6}; \overset{\circ}{7})} = 210$

Resulta que el menor número N es el siguiente:

$N = \overset{\circ}{210} - 1 = 210 - 1 = 209$

Respuesta B

Reto 5

Expresamos N.

$N = (49)(10^n)$

Descomponemos en factores primos.

$N = (7^2)(2^n)(5^n)$

Calculamos n en la cantidad de divisores de N.

$CD(N) = (2 + 1)(n + 1)^2$

$CD(N) = 3(n + 1)^2$

$147 = 3(n + 1)^2$

Simplificamos.

$49 = (n + 1)^2$

$n + 1 = \sqrt{49}$

$n = 6$

Respuesta C

Reto 6

Descomponemos A.

$A = (2^4)(3^6)(5^3)$

Descomponemos en múltiplos de 12.

$A = (2^4)(3^6)(5^3) = (2^2)(3)[(2^2)(3^5)(5^3)]$

$A = \overset{\circ}{12}[(2^2)(3^5)(5^3)]$

Calculamos el número total de divisores múltiplos de 12.

CD = (2 + 1)(5 + 1)(3 + 1)

CD = 72

Luego, la cantidad de divisores de $\overset{\circ}{12}$ es 72.

Respuesta C

Curiosidades

Los números 46 y 96 tienen una propiedad peculiar: su producto no se altera, aunque las cifras que lo componen cambien de lugar.

46 x 96 = 4416 y 64 x 69 = 4416

Esta misma propiedad se cumple con los números 14 y 82.

14 x 82 = 1148 y 41 x 28 = 1148

¿Cómo podrías averiguar si existen otros números de dos cifras que presentan esta misma propiedad?

PREPÁRATE

SESIÓN

4

Razonamiento Matemático

Números y operaciones IV: Mínimo común múltiplo y máximo común divisor

PRONABEC

PERÚ Ministerio de Educación

Actividad: Resolvemos situaciones que impliquen el uso del MCM y del MCD

El mínimo común múltiplo (MCM) y el máximo común divisor (MCD)

La matemática es una ciencia que se constituye como una herramienta fundamental para el desarrollo del pensamiento lógico, numérico y espacial. Diversos matemáticos dedicaron muchos años de su vida al estudio de cada una de las ramas de esta disciplina y, finalmente, lograron dar a conocer al mundo sus deducciones, conjeturas, leyes y teorías, cuyos estudios duraron años y a veces siglos, pero a través de su historia las conocemos y las estudiamos hoy.

Conocer la historia de la matemática te ayudará a valorarla y a comprenderla en una mayor dimensión y motivará tu dedicación al estudio de las ciencias.

En esta sesión se plantearán situaciones en las cuales tendrás la oportunidad de trabajar con relaciones numéricas a partir de conceptos ya estudiados anteriormente y también de nuevos conceptos. Estos últimos te permitirán formar y desarrollar un proceso de aprendizaje basado en la ampliación de tu conocimiento y tu mejora continua.

Recordamos los conceptos básicos

Mínimo común múltiplo (MCM)

Se llama MCM de dos o más números enteros positivos al entero que cumple dos condiciones:

I. Es un múltiplo común a todos.
II. Es el menor posible y es mayor que cero.

Máximo común divisor (MCD)

Se llama MCD de dos o más números enteros positivos al entero que cumple dos condiciones:

I. Es un divisor común a todos.
II. Es el mayor posible.

Números PESI

Son llamados también números primos entre sí, ya que al compararse poseen como único divisor a la unidad.

Propiedades del MCM y del MCD

I. Si dos números A y B son PESI entonces:
MCM (A, B) = A.B
MCD (A, B) = 1
II. El producto de dos números enteros positivos siempre es igual al producto de su MCM y MCD.
A.B = MCM (A, B).MCD (A, B)
III. Sean A = *a.k* y B = *b.k*; donde *a* y *b* son PESI, se cumple que MCD (A, B) = *k*.MCM (A, B) = *a.b.k*

Situaciones problemáticas

Situación problemática 1

Una empresa de instalaciones eléctricas ha sido contratada para iluminar un ambiente donde se llevará a cabo la graduación de los estudiantes de una institución educativa. Se usarán 6 juegos de luces que estarán conectados al mismo tiempo. El primero se encenderá cada 3 segundos; el segundo, cada 6 segundos; el tercero, cada 12 segundos; el cuarto, cada 15 segundos; el quinto, cada 18 segundos; y el último, cada 30 segundos. ¿Cada cuántos minutos se encenderán los seis juegos de luces simultáneamente?[1]

A) 2 min
B) 2,5 min
C) 3 min
D) 5 min
E) 6 min

Solución

Calculamos el menor múltiplo de intervalos de tiempo de las 6 luces.

$$\begin{array}{cccccccccccc|c} 3 & - & 6 & - & 12 & - & 15 & - & 18 & - & 30 & & 2 \\ 3 & - & 3 & - & 6 & - & 15 & - & 9 & - & 15 & & 2 \\ 3 & - & 3 & - & 3 & - & 15 & - & 9 & - & 15 & & 3 \\ 1 & - & 1 & - & 1 & - & 5 & - & 3 & - & 5 & & 3 \\ 1 & - & 1 & - & 1 & - & 5 & - & 1 & - & 5 & & 5 \\ 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & & \end{array}$$

$\text{MCM} = 2^2 . 3^2 . 5 = 180$

Calculamos los minutos que hay en 180 segundos.

$180 / 60 = 3$

Luego, los juegos de luces se encenderán simultáneamente cada 3 minutos.

Respuesta C

[1] Centro Preuniversitario de la PUCP. (septiembre, 2019). *Simulacro de examen de admisión*. Ceprepuc.

Situación problemática 2

Se necesita almacenar 780 botellas de aceite y 1220 botellas de vinagre en cierto número de cajas que contengan el mismo número de botellas, pero sin mezclar botellas de diferente tipo y sin que sobre ninguna. ¿Cuál es el menor número de cajas que se requiere?

A) 20
B) 80
C) 100
D) 60
E) 120

Solución

Para obtener N → el menor número de cajas, el número de botellas en cada caja debería ser el máximo posible.

Hallamos el MCD de 780 y de 1220.

$$\begin{array}{rcr|l} 780 & - & 1220 & 2 \\ 390 & - & 610 & 2 \\ 195 & - & 305 & 5 \\ 39 & - & 61 & \end{array}$$

MCD (780; 1200) = 20

El máximo número de botellas será 20.

Hallamos el número de cajas.

N = 39 + 61 = 100

Luego, el menor número de cajas que se requiere es 100.

Respuesta C

Situación problemática 3

El número de estudiantes de un aula es tal que si se agrupan de 12 en 12, sobran 10; y si se agrupan de 10 en 10, sobran 8. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

I. Si se agrupan de 15 en 15, sobran 13.
II. Si se agregan 2 estudiantes, el nuevo total es múltiplo de 60.

A) Solo I y II
B) Solo II
C) Solo I
D) Ninguna
E) Faltan datos

Solución

N → número de alumnos
Expresamos N en sus múltiplos.

Si agrupamos de 12 en 12, entonces $N = \overset{\circ}{12} + 10 - 12 = \overset{\circ}{12} - 2$.
Si agrupamos de 10 en 10, entonces $N = \overset{\circ}{10} + 8 - 10 = \overset{\circ}{10} - 2$.

Aplicamos la propiedad de los múltiplos.

$MCM\ (\overset{\circ}{12};\ \overset{\circ}{10}) = 60$
$N = \overset{\circ}{60} - 2$

Analizamos las afirmaciones.

Si se agrupan de 15 en 15, sobran 13.

$\overset{\circ}{60} - 2 = 58 \rightarrow 58 / 15$ tiene como residuo 13 **(V)**

Si se agregan 2 estudiantes, el nuevo total es múltiplo de 60.
$\overset{\circ}{60} - 2 + 2 = \overset{\circ}{60}$ **(V)**

Luego, ambas afirmaciones son verdaderas.

Respuesta A

Situación problemática 4

Tres hermanos visitan a su tía. Juan lo hace cada 5 días; Esteban, cada 10 días; y Ramón, cada 15 días. Se sabe que los tres coincidieron en visitar a su tía el 3 de julio. Luego de ese día, ¿en qué fecha coincidieron en la visita que realizaron por tercera vez?

A) 1 de setiembre
B) 31 de agosto
C) 30 de agosto
D) 2 de setiembre
E) 3 de setiembre

Solución

Primera visita: 3 de julio
Calculamos el menor múltiplo de intervalos de visita de Juan, Esteban y Ramón.

$$\begin{array}{ccccc|c} 5 & - & 10 & - & 15 & 5 \\ 1 & - & 2 & - & 3 & 2 \\ 1 & - & 1 & - & 3 & 3 \\ 1 & - & 1 & - & 1 & \end{array}$$

MCM (5; 10; 15) = 30

Coincidirán cada 30 días.

De acuerdo con el calendario, las próximas visitas se realizarán en las siguientes fechas:

	Visita 1	Visita 2	Visita 3
Mes	Julio (31)	Agosto (31)	Setiembre (30)
Día	3	2	1

Luego, el 1 de setiembre coincidirán por tercera vez.

Respuesta A

Retos

Los retos son los desafíos que te impulsarán a desarrollar tus propias estrategias y permitirán verificar tus logros de aprendizaje. Para ello, tendrás que leer bien la situación (problema o ejercicio), comprenderla, analizar los datos, trazar un plan de acción y realizar las operaciones para comprobar luego el resultado. ¡Éxitos en tu proceso de aprendizaje!

Reto 1

Un terreno rectangular mide 36 m × 48 m y se desea colocar árboles en todo su contorno plantando un árbol en cada vértice y manteniendo igual separación entre dos árboles consecutivos, de manera que dicha separación sea la mayor posible. ¿Cuántos árboles se deben plantar?

A) 14
B) 12
C) 18
D) 22
E) 24

Reto 2

Un número es dividido entre 8; 12 y 16, y los residuos obtenidos son 5; 9 y 13, respectivamente. Halla dicho número si es el menor posible.

A) 93
B) 48
C) 43
D) 45
E) 55

Reto 3

Un carpintero ha fabricado un lote de mesas. Si las cuenta por docenas y de 15 en 15, siempre sobran 7. ¿Cuántas mesas fabricó si dicho número está comprendido entre 100 y 180?

A) 127
B) 147
C) 167
D) 157
E) 137

Reto 4

Una caja tiene forma de paralelepípedo de base rectangular. Sus aristas miden 100 cm, 80 cm y 60 cm. Si la llenamos con el menor número de cubos posibles, ¿cuántos cubos entrarán?

A) 20
B) 60
C) 12
D) 30
E) 50

Reto 5

¿Cuál es la menor cantidad de dinero que se necesita para comprar casacas cuyos precios son de S/ 30; S/ 45 o S/ 50 si quiero que me sobren S/ 25 en cada caso?

A) S/ 450
B) S/ 425
C) S/ 475
D) S/ 375
E) S/ 180

Reto 6

Las longitudes de 3 barras de acero son 875 cm, 1875 cm y 5025 cm. Cada una de estas barras debe estar dividida en barras más pequeñas sin que sobre material y de modo que la longitud de todas las barras obtenidas sea la misma y la mayor posible. ¿Cuántos cortes en total se tendrán que realizar?

A) 308
B) 311
C) 305
D) 25
E) 305

Estrategias de solución para calcular el número total de cortes, postes o estacas

En caso de un circuito abierto

$$\text{Número de cortes} = \frac{\textit{Longitud total}}{\textit{Longitud unitaria}} - 1$$

$$\text{Número de estacas o postes} = \frac{\textit{Longitud total}}{\textit{Longitud unitaria}} + 1$$

En caso de un circuito cerrado

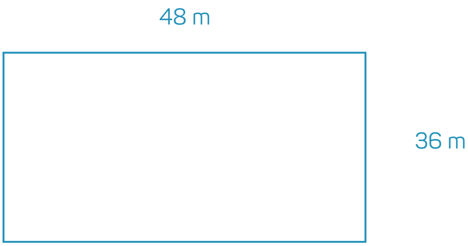
$$\text{Número de cortes} = \frac{\textit{Longitud total}}{\textit{Longitud unitaria}}$$

$$\text{Número de estacas} = \frac{\textit{Longitud total}}{\textit{Longitud unitaria}}$$

Resolvemos los retos

Reto 1

Representamos el terreno de forma rectangular.



Calculamos la mayor separación posible entre los árboles.

48	-	36	2
24	-	18	2
12	-	9	3
4	-	3	

MCD (36; 48) = 12

Calculamos el contorno del terreno.

Perímetro = 36(2) + 48(2) = 168
Número de árboles = 168 / 12 = 14

Luego, en el terreno se deben plantar 14 árboles.

Respuesta A

Reto 2

Para tener el mismo residuo, restamos el menor múltiplo.

$N \rightarrow \overset{\circ}{8} + 5 - 8 = \overset{\circ}{8} - 3$
$N \rightarrow \overset{\circ}{12} + 9 - 12 = \overset{\circ}{12} - 3$
$N \rightarrow 16 + 13 - 16 = \overset{\circ}{16} - 3$

Calculamos el MCM de 8; 12 y 16.

8	-	12	-	16	|	2
4	-	6	-	8	|	2
2	-	3	-	4	|	2
1	-	3	-	2	|	2
1	-	3	-	1	|	3
1	-	1	-	1	|	

MCM (8; 12; 16) = 48

Aplicamos la propiedad de los múltiplos: $N = \overset{\circ}{48} - 3$

Hallamos el menor número posible.

N = 48 - 3 = 45

Luego, el menor número posible es 45.

Respuesta D

Reto 3

N → Número de mesas
$N = \overset{\circ}{12} + 7$
$N = \overset{\circ}{15} + 7$
$100 < N < 180$

Calculamos el MCM (12; 15) = 60.

El único múltiplo de 60 comprendido entre 100 y 180 que cumple la condición es 120.

El número de mesas será N = 120 +7 = 127.

Respuesta A

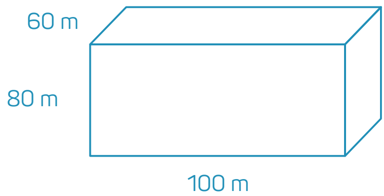
Reto 4

N → número de cubos

Hallamos el MCD de las longitudes de las aristas: 100 cm, 80 cm y 60 cm.

80	-	100	-	60	|	2
40	-	50	-	30	|	2
20	-	25	-	15	|	5
4	-	5	-	3	|	

MCD (80; 100; 60) = 20



Averiguamos cuántas veces está contenido 20 en cada una de las 3 dimensiones.

100/20 = 5
80/20 = 4
60/20 = 3

Multiplicamos los cocientes.

(5)(4)(3) = 60

Luego, en la caja entran 60 cubos de 20 cm de arista cada uno.

Respuesta B

Reto 5

N → cantidad de dinero

Calculamos el MCM de los siguientes precios: S/ 30; S/ 45 y S/ 50.

$$\begin{array}{ccccc|c} 30 & - & 45 & - & 50 & 2 \\ 15 & - & 45 & - & 25 & 3 \\ 5 & - & 15 & - & 25 & 3 \\ 5 & - & 5 & - & 25 & 5 \\ 1 & - & 1 & - & 5 & 5 \\ 1 & - & 1 & - & 1 & \end{array}$$

MCM (30; 45; 50) = 450

Si tomamos en cuenta que sobran S/ 25, entonces N = 450 + 25 = 475.

Luego, la cantidad de dinero que necesita es S/ 475.

Respuesta C

Reto 6

N → número total de cortes

Hallamos el MCD de las longitudes de las barras.

$$\begin{array}{ccccc|c} 875 & - & 1875 & - & 5025 & 5 \\ 175 & - & 375 & - & 1005 & 5 \\ 35 & - & 75 & - & 201 & \end{array}$$

MCD (875;1 875; 5025) = 25

Total de barras: 35 + 75 + 201 = 311

El número total de cortes será igual al número de cortes de cada barra menos 1.

$$N = 311 - 3 = 308$$

Luego, el total de cortes será 308.

Respuesta A

Curiosidades

A los números 220 y 284 se les considera "números amigos", porque ambos tienen una particularidad.

El número 220 es divisible exactamente por 1; 2; 4; 5; 10; 11; 20; 22; 44; 55 y 110, a excepción del mismo número. Si sumamos estos divisores, el resultado es 284.

El número 284 es a su vez divisible por 1; 2; 4; 71 y 142, a excepción del mismo número. Si sumamos estos divisores, el resultado es 220.

Por ello, los matemáticos los consideran números amigos. Cada uno de ellos parece existir para servir y honrar al otro.

¿Cómo descubrir aquellos números que están perdidos en las redes de la amistad matemática?

PREPÁRATE

SESIÓN

5

Razonamiento Matemático

Ecuaciones e inecuaciones lineales

PRONABEC

PERÚ Ministerio de Educación

Actividad: Utilizamos nuestros conocimientos de ecuaciones e inecuaciones para resolver problemas cotidianos

Ecuaciones e inecuaciones lineales

Recordemos conceptos básicos

Ecuación

Una ecuación es una igualdad matemática entre dos expresiones denominadas *miembros*, que están separadas por el signo igual, en las que aparecen elementos conocidos y datos desconocidos o incógnitas que están relacionados mediante operaciones matemáticas.

Una de las técnicas de modelación elemental por excelencia es el planteo de ecuaciones.

Para poder aplicar la ecuación con éxito es fundamental el entrenamiento que se tenga en la traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico.

Es conveniente llegar a un acuerdo en cuanto a convenciones generales de redacción para no crear ambigüedades.

Inecuación

Una inecuación es una desigualdad algebraica en la que los conjuntos se encuentran relacionados por signos.

Método de Pólya

1. **Entender el problema**
   ¿Entiendo lo que dice el problema? ¿Cuáles son los datos que forman parte del problema?
2. **Elaborar el plan**
   ¿Cómo lo resolveré? ¿Qué estrategias utilizaré?
3. **Ejecutar el plan**
   Poner en práctica las estrategias y los algoritmos.
4. **Verificar la solución**
   Se cuestiona lo que se hizo y se procede a la verificación.

Situaciones problemáticas

Situación problemática 1

En estos días vi un programa de televisión en el que dos jóvenes emprendedores dialogaban sobre las diversas estrategias sanitarias que actualmente se aplican para enfrentar la pandemia originada por la COVID-19. Al respecto, me preguntaba cuántos apretones de manos se evitan si seguimos el correspondiente protocolo de bioseguridad.

A) 45
B) 46
C) 47
D) 48
E) 49

Solución

Elaboramos un cuadro:

Número de personas	Número de apretones de mano
2	1
3	3
4	6

Si son 10 o más personas, realizamos el cálculo por medio de la siguiente fórmula:
$n(n - 1) / 2$
Donde n es el número de personas.

Hacemos un cálculo. Si son 3 personas, serían 3 apretones de mano, y si son 4 personas, serían 6 apretones de mano. Pero si son 10 personas, ¿cuántos apretones serían?

Se puede representar a través de la fórmula $R = n(n - 1) / 2$. Su ecuación es la siguiente:
$R = 10(10 - 1) / 2$
$R = 10(9) / 2$
$R = 90 / 2$
$R = 45$ apretones de mano

Respuesta A

Situación problemática 2

¡Presta atención! Piensa en un número, súmale 4, duplica el valor obtenido, réstale 2, divídelo entre 2 y réstale el número que pensaste. ¡Ya sé cuál es el resultado... Es 3!

Solución

Veamos cómo adiviné el número

Texto literal	Enunciado simbólico
Piensa en un número	x
Súmale 4	$x + 4$
Duplica el valor obtenido	$2(x + 4) = 2x + 8$
Réstale 2	$(2x + 8) - 2 = 2x + 6$
Divídelo entre 2	$(2x + 6) / 2 = x + 3$
Resta el número que pensaste	$(x + 3) - 3 = x$

Situación problemática 3

Transposición de términos

Veamos la siguiente ecuación:

$$\underbrace{4x + 8}_{\text{primer miembro}} = \underbrace{3x + 10}_{\text{segundo miembro}}$$

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

Solución

Cuando se transpone los términos, es conveniente pasar las x al primer miembro y lo demás al segundo.

$4x - 3x = 10 - 8$ (reducir términos semejantes)

$x = 2$

Entonces, el valor de x es 2.

Respuesta B

Situación problemática 4

Veamos otro caso:

$$\underbrace{4x - 8}_{\text{primer miembro}} > \underbrace{2x + 23}_{\text{segundo miembro}}$$

A) 41/2

B) 12,5

C) 31/2

D) 14,5

E) 5

Solución

Hacemos la transposición.

$4x - 2x > 23 + 8$

$2x > 31$

$x > 31 / 2$

Entonces, el conjunto solución está formado por todos los valores mayores a 31 / 2 o 15,5.

Respuesta C

Situación problemática 5

Con motivo de la pandemia, muchas familias contrajeron deudas con diferentes empresas. Así, la familia de un estudiante tiene una deuda con una empresa por 6 meses impagos. La deuda total es de S/ 480. La familia del estudiante fue a la empresa y solicitó información sobre la forma de refinanciar el pago de la deuda. La encargada le manifestó que hay tres formas de hacerlo: la primera consiste en pagar S/ 200 ahora y lo restante de la deuda se fracciona en partes iguales durante 4 meses; la segunda señala que se debe pagar S/ 150 ahora y el resto se fracciona en partes iguales durante 5 meses; y la última forma sería pagarlo durante 6 meses en partes iguales, independientemente de cuál sea su deuda actual. ¿Con cuál de las tres opciones realizará un pago mensual menor?

A) 50

B) 66

C) 70

D) 80

E) 90

Solución

¿Qué datos nos proporciona la situación planteada?

Leemos el problema y apuntamos los datos.

– Deuda total: S/ 480

– Formas de pago: 3

La cantidad de S/ 200 y el resto será dividido entre 4 meses.

La cantidad de S/ 150 y el resto será dividido entre 5 meses.

El total se pagará en 6 meses.

¿Qué conocimiento matemático necesitamos para resolverlo? ¿Cómo organizamos la información y qué estrategia utilizaremos?

Planteamos las ecuaciones:

A) $200 + 4x = 480$

B) $150 + 5x = 480$

C) $6x = 480$

Resolvemos.

$200 + 4x = 480$
$4x = 480 - 200$
$4x = 280$
$x = 70$

$150 + 5x = 480$
$5x = 480 - 150$
$5x = 330$
$x = 66$

$6x = 480$
$x = 480/6$
$x = 80$

Respuesta B

Situación problemática 6

Para protegerse del coronavirus, muchas familias trabajan desde sus casas. Así, la mamá de un estudiante es abogada y el lunes llegó a casa con muchos expedientes. Por ello, su hijo le preguntó: "Mamá, ¿tienes que revisar tantos expedientes?". Y ella dijo: "Sí". Su hijo le volvió a preguntar: "¿Cuántos tienes?". Ella le respondió: "No son tantos. Si tuviera 5 veces la cantidad de expedientes que tengo, sobrepasarían los 100; pero si tuviera solo la tercera parte y 38 expedientes más, no llegarían a la centena". El hijo se quedó pensando cuántos expedientes habría traído su mamá. Ahora, responde lo siguiente: ¿cuántos expedientes tiene la mamá del estudiante? ¿Cómo plantearíamos esta situación?

A) $140 > x > 125$
B) $130 > x > 108$
C) $186 > x > 20$
D) $190 > x > 130$
E) $100 > x > 10$

Solución

Procedemos a operacionalizar los enunciados anteriormente descritos de la siguiente forma:

$5x > 100$ y la otra sería $x/3 + 38 < 100$

Primer enunciado:

$5x > 100$

$x > 100/5$

$x > 20$

Segundo enunciado:

$x/3 + 38 < 100$

$x/3 < 100 - 38$

$x/3 < 62$

$x < 62\,(3)$

$x < 186$

La mamá de Juan tiene más de 20 expedientes, pero menos de 186.

Respuesta C

Retos

Los retos son los desafíos que te impulsarán a desarrollar tus propias estrategias y permitirán verificar tus logros de aprendizaje. Para ello, tendrás que leer bien la situación (problema o ejercicio), comprenderla, analizar los datos, trazar un plan de acción y realizar las operaciones para comprobar luego el resultado. ¡Éxitos en tu proceso de aprendizaje!

Reto 1

Actualmente, tomando en cuenta que el movilizarnos en transporte público incrementa el riesgo de infección por la COVID-19, mucha gente utiliza preferentemente la bicicleta. Por ello, un comerciante ha decidido vender muchas más bicicletas que triciclos. A causa de esto, quiere cambiar los triciclos por bicicletas. Si en total tiene 48 artículos, entre triciclos y bicicletas, y el número de triciclos excede en 6 al número de bicicletas, ¿cuántos triciclos tiene que cambiar por bicicletas?

A) 21 bicicletas
B) 24 triciclos
C) 27 bicicletas
D) 21 triciclos
E) 27 triciclos

Reto 2

Completa este cuadro numérico para que sea mágico; es decir, que tienes que conseguir que cada fila, cada columna y las dos diagonales sumen lo mismo.

16	a	b
c	d	e
12	14	4

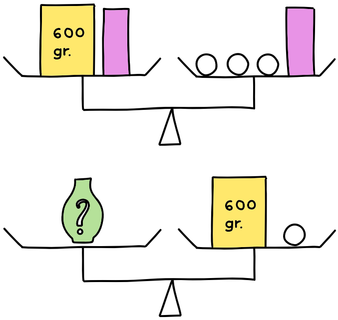
Calcula.

2a + 3b (c + a) + (e + d)

A) 555
B) 323
C) 232
D) 432
E) 347

Reto 3

Observa la balanza y deduce el peso de la jarra.



A) 700 g
B) 800 g
C) 900 g
D) 930 g
E) 963 g

Resolvemos los retos

Reto 1

Como ahora no podemos andar mucho en transporte público por la pandemia y se utiliza más la bicicleta, un comerciante ha decidido vender muchas más bicicletas que triciclos y para ello decide cambiar los triciclos por bicicletas. Si tiene en total 48 artículos entre bicicletas y triciclos y el número de triciclos excede en 6 al número de bicicletas ¿cuántos triciclos tiene que cambiar por bicicletas?

Número de bicicletas: x

Número de triciclos: $x + 6$

Total de artículos: 48

Planteamos lo siguiente:

$$x + (x + 6) = 48$$

$$2x + 6 = 48$$

Transponemos términos y reducimos.

$$2x = 42 \rightarrow x = 21$$

Tiene 21 bicicletas y 27 triciclos, por lo tanto, debe cambiar 27 triciclos por bicicletas.

Respuesta E

Reto 2

Calculamos el resultado de la última fila: 12 + 14 + 4 = 30.

El resultado de cada fila y columna debe ser 30.

Ahora, calculamos el resultado de la primera columna.

$16 + c + 12 = 30 \rightarrow c = 2$

Calculamos la diagonal dirigida hacia la derecha.

$16 + d + 4 = 30 \rightarrow d = 10$

Calculamos *a* en la segunda columna.

$a + 10 + 14 = 30 \rightarrow a = 6$

Calculamos *e* en la segunda fila.

$2 + 10 + e = 30 \rightarrow e = 18$

Calculamos *b* en la última columna.

$b + 18 + 4 = 30 \rightarrow b = 8$

Cuando ya tenemos los valores, calculamos lo que nos piden.

$2\,a + 3b\,(c + a) + (e + d)$

Reemplazamos datos.

$2(6) + 3(8)\,(2 + 6) + (18 + 10) = 12 + 24(8) + 28 = 12 + 192 + 28 = 232$

El resultado de la expresión es 232.

Respuesta C

Reto 3

Observamos la primera balanza.

Caja + cilindro = 3 esferas + cilindro

Simbolizamos 600 + c = 3e + c cancelando las c por la propiedad cancelativa

600 = 3 e → e = 600/3 → e = 200g

Observamos la segunda balanza.

Florero = caja + esfera

Reemplazamos valores.

Florero = 600 + 200 = 800

El florero pesa 800 g.

Respuesta B

PREPÁRATE

SESIÓN
6

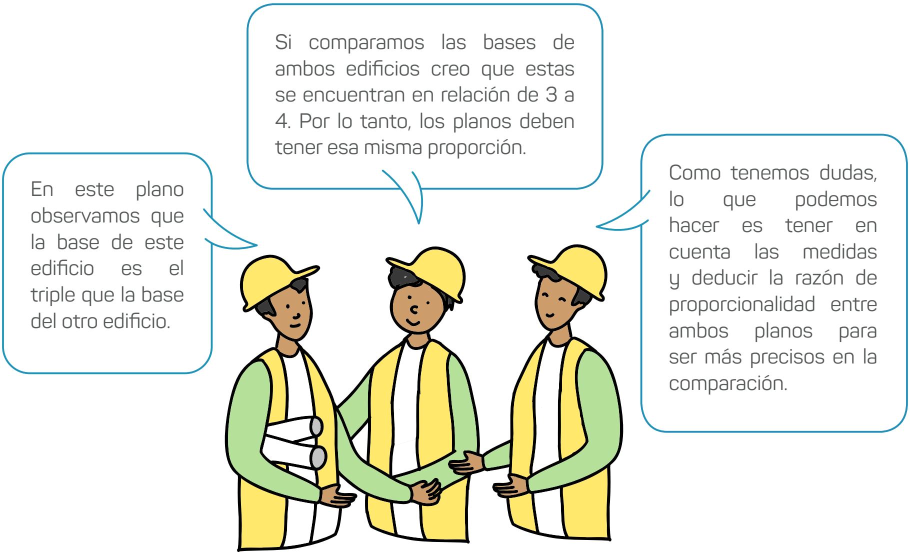
Razonamiento Matemático
Razones y proporciones

PRONABEC

PERÚ Ministerio de Educación

Actividad: Resolvemos situaciones o problemas relacionados con razones y proporciones

Razones y proporciones



En el contexto del desarrollo científico y tecnológico, la matemática es el instrumento más potente que el ser humano pueda emplear en la investigación de las leyes de los fenómenos naturales. Por ello, Auguste Comte, filósofo francés (1758-1857), fundamentó la veracidad de este enunciado a través del siguiente argumento: "Toda educación científica que no se inicie con la matemática es imperfecta en su base".

Hoy en día es una certeza la importancia y el valor de la matemática y su lenguaje simbólico. Sin ella los descubrimientos y los logros de la ciencia moderna no hubieran alcanzado tal magnitud de avance.

En esta sesión podrás apreciar que el conocimiento de los conceptos de *razón* y de *proporcionalidad* son muy útiles en todo campo científico y también en la vida cotidiana. El resolver las situaciones planteadas te permitirá aplicar dichos conceptos, los que te servirán de base para explicar qué son las magnitudes proporcionales, así como confirmar la estrecha relación con las nociones de matemática financiera. Recuerda también lo que mencionó Einstein: "Si quieres resultados diferentes, no hagas siempre lo mismo". Así que, ¡desarrolla tu creatividad e ingenio en la resolución de problemas!

Recordamos los conceptos básicos

Razón

Es la comparación entre dos cantidades o magnitudes mediante la sustracción o la división.

Razón aritmética

Es la que resulta de la comparación entre dos cantidades o magnitudes por medio de la diferencia e indica en cuánto excede una cantidad a la otra.

$$r = a - b$$

Razón geométrica

Es la que resulta de la comparación entre dos cantidades o magnitudes por medio de la división e indica cuántas veces una de las cantidades contiene a la unidad de referencia.

$$k = \frac{a}{b}$$

Proporción

Es la igualdad de dos razones ya sean aritméticas o geométricas.

$a - b = c - d$ → proporción aritmética

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ → proporción geométrica

a y c → términos llamados antecedentes

b y d → términos llamados consecuentes

a y d → términos extremos

b y c → términos medios

k → constante de proporcionalidad

Tipos de proporciones

Tipo	Proporción aritmética	Proporción geométrica
Discreta Los valores de los términos medios son diferentes.	$a - b = c - d$ d es cuarta diferencial de a; b y c.	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ d es cuarta proporcional de a; b y c.
Continua Los valores de los términos medios son iguales.	$a - b = b - c$ b es media diferencial de a y c. c es tercera diferencial de a y b.	$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ b es media proporcional de a y c. c es tercera proporcional de a y b.

Propiedad fundamental de las proporciones aritméticas

$$a - b = c - d$$

La suma de los términos extremos es igual a la suma de los términos medios.

$$a + d = b + c$$

Propiedad fundamental de las proporciones geométricas

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \rightarrow ac = bd$$

El producto de los términos extremos es igual al producto de los términos medios.

Situaciones problemáticas

Situación problemática 1

Las edades de Lucía y Pablo están en relación de 7 a 5. Si dentro de 9 años sus edades estarán en relación de 5 a 4, ¿cuál es la edad actual de Lucía?

A) 21
B) 28
C) 14
D) 35
E) 42

Solución

Edades actuales: Lucía → a Pablo → b

Relación actual: $\frac{a}{b} = \frac{7k}{5k}$

Relación dentro de 9 años: $\frac{a}{b} = \frac{7k + 9}{5k + 9}$

Aplicamos la propiedad fundamental de las proporciones. $\frac{7k + 9}{5k + 9} = \frac{5}{4}$

Resolvemos

$4(7k + 9) = 5(5k + 9)$
$28k + 36 = 25k + 45$
$28k - 25k = 45 - 36$
$3k = 9 \rightarrow k = 3$

La edad actual de Lucía es la siguiente:

$a = 7k = 7(3) = 21$

Respuesta A

Situación problemática 2

Se tienen tres números enteros positivos, cuya suma es 198. Si los números mayores son entre sí como 3 es a 2 y los dos menores están en relación de 5 a 4, determina la razón aritmética entre el mayor y el menor de los números dados.[1]

A) 14
B) 30
C) 42
D) 35
E) 28

Solución

Sean los números a; b y c

$a > b > c$

$a + b + c = 198$

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{2} \qquad \frac{b}{c} = \frac{5}{4}$$

Homogeneizamos para calcular el valor de b.

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{2} = \frac{3(5)}{2(5)} = \frac{15k}{10k}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{5}{4} = \frac{5(2)}{4(2)} = \frac{10k}{8k}$$

Si $a + b + c = 198$, entonces $15k + 10k + 8k = 198$

$33k = 198$

$k = 198/33 \rightarrow k = 6$

Los números serán los siguientes:

$a = 15k = 15(6) = 90$

$b = 10k = 10(6) = 60$

$c = 8k = 8(6) = 48$

[1] Universidad Continental. (2020). *Simulacro de examen de admisión*. Aduni.

La diferencia aritmética entre el mayor y el menor número es $r = 90 - 48 = 42$.

Luego, la diferencia aritmética es 42.

Respuesta C

Situación problemática 3

Se tiene una mezcla de 70 L de alcohol y 30 L de agua. Se extraen 30 L de la mezcla y se reemplaza por agua. ¿Cuál es la razón aritmética de las cantidades de agua y alcohol que quedan?

A) 1 L
B) 2 L
C) 4 L
D) 3 L
E) 5 L

Solución

Hallamos la razón de la mezcla.

$$\frac{Alcohol}{Agua} = \frac{70}{30} = \frac{7}{3}$$

Como se extraen 30 litros de la mezcla, la nueva razón será de 10 a 3.

Tomamos en cuenta los siguientes datos:

(100/10)(3) = 30
(30/10)(3) = 9
(70/10)(3) = 21

Ahora, completamos la tabla.

Productos	Cantidades	Relación	Extracción
Alcohol	70 L	7	21 L
Agua	30 L	3	9 L
Mezcla	100 L	10	30 L

Obtenemos.

Alcohol: 70 – 21 = 49
Agua: 30 – 9 = 21

Si se agregan 30 L de agua, entonces tendremos 30 + 21 = 51.

Luego, la razón aritmética entre la cantidad de agua y la cantidad de alcohol que queda será 51 – 49 = 2 L.

Respuesta B

Situación problemática 4

Rosaura quiere ayudar a la economía del hogar y decide hacer un negocio de emprendimiento. Para ello, realiza un estudio de mercado entre sus amistades y las vecinas y los vecinos sobre sus postres favoritos. El resultado de dicho estudio señala que el arroz con leche es el preferido. Así, para iniciar su negocio consigue la receta de su abuelita (ver cuadro) con los ingredientes que requiere para la preparación. Sin embargo, ella se pregunta cómo preparar arroz con leche para 25 personas con una receta que es para 5 personas. Para resolver la inquietud de Rosaura, responde lo siguiente: ¿en cuánto excede la cantidad de agua a la de arroz?

Cantidad	Producto
4 tazas	agua
1 pieza	canela
1 taza	arroz
1 tarro	leche evaporada
1 taza	leche condensada
1/2 taza	pasas
1 cucharada	canela molida

A) 10
B) 15
C) 5
D) 20
E) 25

Solución

Calculamos la razón entre la cantidad inicial y la que necesitamos.

$$\frac{5\ \textit{personas}}{25\ \textit{personas}} = \frac{1\ \textit{taza de arroz}}{5\ \textit{tazas de arroz}} = k = \frac{1}{5}$$

$$\frac{5\ \textit{personas}}{25\ \textit{personas}} = \frac{4\ \textit{tazas de agua}}{20\ \textit{tazas de agua}} = k = \frac{1}{5}$$

La razón es 1/5. Por lo tanto, multiplicamos todas las cantidades por 5.

Entonces, elaboramos un cuadro con la ampliación de los ingredientes.

Cantidad para 5	Incremento × 5	Producto
4 tazas	4(5) = 20	agua
1 pieza	1(5) = 5	canela
1 taza	1(5) = 5	arroz
1 tarro	1(5) = 5	leche evaporada
1 taza	1(5) = 5	leche condensada
1/2 taza	1/2(5) = 5/2 = 2,5	pasas
1 cucharada	1(5) = 5	canela molida

Luego, la cantidad de agua excede a la cantidad de arroz en 15 tazas.

Respuesta B

Retos

Los retos son los desafíos que te impulsarán a desarrollar tus propias estrategias y permitirán verificar tus logros de aprendizaje. Para ello, tendrás que leer bien la situación (problema o ejercicio), comprenderla, analizar los datos, trazar un plan de acción y realizar las operaciones para comprobar luego el resultado. ¡Éxitos en tu proceso de aprendizaje!

Reto 1

Para un examen de admisión, un alumno ahorra S/ 24 al mes. Lo que recibe de propina y lo que gasta mensualmente están en relación de 4 a 1. ¿En cuántos soles deberá disminuir sus gastos mensuales para que la relación entre lo que recibe de propina y lo que gasta sea 16/3?[2]

A) 4
B) 1
C) 2
D) 3
E) 6

Reto 2

Se tienen dos recipientes A y B. Cada uno contiene una mezcla de agua y vino. En el primero, la relación es de 2 a 3 y, en el segundo, de 4 a 1. Si los contenidos de A y B se vierten en otro recipiente, la tercera parte de la mezcla será vino. ¿En qué relación estaban los contenidos iniciales de A y B?[3]

A) 1 a 2
B) 1 a 3
C) 2 a 3
D) 4 a 1
E) 5 a 2

[2] Universidad Continental. (2020). *Simulacro de examen de admisión*. Aduni.
[3] Universidad Continental. (2020). *Simulacro de examen de admisión*. Aduni.

Reto 3

Entre Consuelo y Roberto compraron libros por un valor de S/ 360. Cada uno de los libros que compró Consuelo costó S/ 50 y cada uno de los que compró Roberto, S/ 40. Si ambos compraron el mismo número de libros, ¿qué cantidad de soles pagó Roberto?

A) 180
B) 120
C) 160
D) 240
E) 200

Reto 4

En un examen de admisión se observa que el número de problemas respondidos y el número total de problemas están en relación de 2 a 3. Además, los respondidos en forma correcta y los respondidos erróneamente están en relación de 1 a 2. ¿Cuál es la relación de los problemas errados con respecto al total de problemas?

A) 2/3
B) 6/5
C) 9/4
D) 3/5
E) 4/9

Reto 5

La relación entre el ancho y el largo de un terreno rectangular es de 3 a 5. Si se sabe que el perímetro del terreno es de 640 m, ¿cuál es la medida del ancho del terreno?

A) 180 m
B) 140 m
C) 120 m
D) 150 m
E) 200 m

Reto 6

En una proporción geométrica continua, el producto de los cuatro términos es igual a 13 310. Si uno de los extremos equivale a la suma de los medios, ¿cuál es el valor del otro término extremo?

A) 10
B) 8
C) 7
D) 6
E) 5

Resolvemos los retos

Reto 1

Ahorra S/ 24

$$\frac{\text{propina}}{\text{gasto}} = \frac{4k}{1k}$$

Disminuir gastos → x

Ahorro = propina - gasto

Calculamos k

$$4k - k = 24 \rightarrow 3k = 24 \rightarrow k = 8$$

Calculamos x

$$\frac{\text{propina}}{\text{gasto} - x} = \frac{16}{3} \rightarrow \frac{24 + 8}{8 - x} = \frac{16}{3}$$

Despejamos x en la proporción.

$$16(8 - x) = 3(32)$$
$$128 - 16x = 96$$
$$128 - 96 = 16x$$
$$32 = 16x$$
$$x = 2$$

Respuesta C

Reto 2

A y B → recipientes
C → tercer recipiente
m y n → las constantes de proporcionalidad

	A	B	C
Agua	$2m$	$4n$	$2m + 4n$
Vino	$3m$	n	$3m + n$
Total	$5m$	$5n$	

Si se mezclan los recipientes A y B en el recipiente C, la tercera parte de la mezcla será vino.

$$\frac{2m + 4n}{3m + n} = \frac{2}{1}$$

Aplicamos la propiedad fundamental de las proporciones.

$2m + 4n = 2(3m + n) \rightarrow 2m + 4n = 6m + 2n$

$2n = 4m \rightarrow n = 2m$

Reemplazamos.

$$\frac{A}{B} = \frac{5m}{5n} = \frac{5m}{5(2m)} = \frac{1}{2}$$

Luego, la relación inicial entre A y B es 1/2.

Respuesta A

Reto 3

Consuelo pagó $\rightarrow$ a

Roberto pagó $\rightarrow$ b

$a + b = 360$

Número de libros que compró Consuelo: $a/50$

Número de libros que compró Roberto: $b/40$

Formamos la proporción porque compraron el mismo número: k

$a/50 = b/40 = k$

Aplicamos la propiedad.

$$\frac{a+b}{50+40}=\frac{b}{40}\rightarrow\frac{360}{90}=\frac{b}{40}\rightarrow b=160$$

Luego, Roberto pagó S/ 160.

Respuesta C

Reto 4

PR → problemas respondidos
TP → total de problemas
C → problemas correctos
E → problemas errados

Establecemos la relación de proporcionalidad.

$$\frac{PR}{TP}=\frac{2k}{3k} \quad (1) \qquad \frac{C}{E}=\frac{1a}{2a} \quad (2) \qquad \frac{E}{TP}=\frac{2a}{3k} \quad (3)$$

Además, sabemos:

$$PR = C + E$$

Reemplazamos.

$$2k = 1a + 2a \rightarrow 2k = 3a \ (4)$$

Reemplazamos los valores de (4) en (1).

$$\frac{2k}{3k}=\frac{3a}{x}\rightarrow x=3k$$

Despejamos y simplificamos.

$$2x = 9a \rightarrow 2/9 = a/x$$

Reemplazamos el valor obtenido en (3).

$$\frac{2a}{3k}=\frac{2a}{x}$$

$$\frac{E}{TP}=\frac{2a}{3k}=\frac{2a}{x}=2\left(\frac{a}{x}\right) \quad \text{pero} \ \frac{a}{x}=\frac{2}{9}$$

Reemplazamos y se obtiene que la relación entre problemas errados y el total de problemas es el siguiente:

$$\frac{E}{TP} = 2\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{4}{9}$$

Respuesta E

Reto 5

Ancho del terreno → *a*
Largo del terreno → *b*
Perímetro del terreno → P

$P = 2a + 2b = 2(a + b)$

Reemplazamos.

$P = 640 = 2(a + b)$

Relación: $a/b = 3/5 \rightarrow b = 5a/3$

Reemplazamos en la fórmula del perímetro.

$640 = 2(a + 5a/3) \rightarrow 320 = (3a + 5a)/3 \rightarrow 960 = 8a$
$\rightarrow a = 960 / 8 = 120$

Luego, el ancho es 120 m.

Respuesta C

Reto 6

Proporción geométrica continua → a/b = b/c

Aplicamos la propiedad fundamental de las proporciones y planteamos la ecuación.

$(a)(b^2)(c) = 13\ 310$

Donde: $a = b + b = 2b$

Descomponemos.

$$13\,310 = (2)(11^3)(5)$$

Reemplazamos.

$$(2b)(b^2)(c) = 13\,310 \rightarrow (2)(b^3)(c) = (2)(113)(5)$$

Comparamos y se obtiene lo siguiente: $b = 11$ y $c = 5$

Luego, el otro extremo es 5.

Respuesta E

Curiosidades

En el siguiente cuadrado mágico, la constante 34 no solo se obtiene sumando filas, columnas o diagonales, sino también sumando de otra manera cuatro números del mismo cuadro.

4	5	16	9
14	11	2	7
1	8	13	12
15	10	3	6

Ejemplo

$2 + 7 + 13 + 12 = 34$
$1 + 8 + 10 + 15 = 34$
$10 + 13 + 7 + 4 = 34$

Hay 86 maneras de comprobarlo, ¿podrías averiguar otras de ellas?

PREPÁRATE

SESIÓN
7

Razonamiento Matemático

Ecuaciones de segundo grado en R

PRONABEC

PERÚ Ministerio de Educación

Actividad: Utilizamos nuestros conocimientos sobre ecuaciones de segundo grado o cuadráticas para resolver problemas cotidianos

Ecuaciones de segundo grado en R

Recordamos conceptos básicos

Ecuación

Una ecuación de segundo grado es aquella que tiene como forma general $\mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c} = 0$, donde **a**, **b** y **c** son números reales y **a** es diferente de cero.

Pueden ser de dos tipos: completas e incompletas.

Completa

$\mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c} = 0$

Incompletas

$ax^2 + bx = 0$, donde $c = 0$

$ax^2 + c = 0$, donde $b = 0$

Los carpinteros y otros profesionales utilizan ecuaciones cuadráticas para optimizar el área de un espacio con perímetro o dimensiones determinadas.

Situaciones problemáticas

Situación problemática 1

Las edades de Ricardo y Mariela suman 33 años, y el producto de estas es 270. ¿Cuál es la edad de Ricardo y la de Mariela?

A) Ricardo, 18 años; Mariela, 15 años
B) Ricardo, 17 años; Mariela, 16 años
C) Ricardo, 19 años; Mariela, 14 años
D) Ricardo, 20 años; Mariela, 13 años
E) Ricardo, 21 años; Mariela, 12 años

Solución

Se puede resolver fácilmente si aplicamos las ecuaciones de segundo grado de la siguiente manera:

Edad de Mariela: x

Edad de Ricardo: $33 - x$

Ecuación: $x(33 - x) = 270$

Multiplicamos. $33x - x^2 = 270$.

Esta es una ecuación de segundo grado, porque el exponente de la variable es 2.

Ordenamos la ecuación. $x^2 - 33x + 270 = 0$.

Ahora busca 2 números que multiplicados den 270 y que sumados, 33.

Al descomponer 270 se obtiene lo siguiente:

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r}270\\135\\45\\15\\5\\1\end{array} & \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}2\\3\\3\end{array}\right\} 18 \\ \left.\begin{array}{l}3\\5\end{array}\right\} 15 \\ \end{array} \end{array}$$

Esos números son 18 y 15. Es decir, Ricardo tiene 18 años y Mariela, 15 años.

Respuesta A

Situación problemática 2

Un grupo de jóvenes emprendedores necesita una camioneta para su empresa de reparto a domicilio. Así, deciden adquirir una, cuyo costo es de $ 13 800. Para ello, hacen cálculos, de manera que cada uno debe dar una cantidad determinada. Sin embargo, la situación económica de dos de ellos no les permitiría hacerlo. Por lo tanto, los demás tendrán que dar $ 1150 más de lo que les tocaba. ¿Cuánto dinero debe aportar cada uno y cuántos son en total los integrantes de la empresa?

A) Cada uno aporta $ 4500 y son 4 integrantes.
B) Cada uno aporta $ 3450 y son 6 integrantes.
C) Cada uno aporta $ 4700 y son 6 integrantes.
D) Cada uno aporta $ 4800 y son 5 integrantes.
E) Cada uno aporta $ 4920 y son 4 integrantes.

Solución

Leemos de nuevo el problema y vamos deduciendo los datos.

Número de integrantes: x

Aporte de cada uno: $13\,800/x$

Descontamos a los que no participan: $(x - 2)$

Nuevo aporte: $13\,800/(x - 2)$

La ecuación sería la siguiente:

$$[13\,800 / (x - 2)] - 1150 = 13\,800/x$$

Resolvemos la ecuación.

$$[13\,800 - 1150(x - 2)]/(x - 2) = 13\,800/x$$

Aplicamos la propiedad fundamental de las proporciones.

$$[13\,800 - 1150(x - 2)]x = 13\,800(x - 2)$$

Resolvemos $[13\,800 - 1150x + 2300]x = 13\,800x - 27\,600$

Multiplicamos en el primer miembro.

$$13\,800x - 1150x^2 + 2300x = 13\,800x - 27\,600$$

Acomodamos según la forma general y reducimos términos semejantes.

$$0 = 1150x^2 - 2300x - 27\,600$$

Sacamos la décima parte a toda la expresión.

$$0 = 115x^2 - 230 - 2760$$

Sacamos la quinta parte a toda la expresión para hacerla más sencilla.

$$0 = 23x^2 - 46x - 552$$

Todavía podemos sacar la vigesimotercera parte a toda la expresión.

$$0 = x^2 - 2x - 24$$

Luego, factorizamos la ecuación.

$$x = 6 \quad \text{y} \quad x = -4$$

Pero solo consideramos el valor positivo.

Por lo tanto, los integrantes de la empresa son en total 6, y solo 4 podrán aportar el dinero. El monto que cada uno de los 4 miembros debe pagar será el siguiente:

$$13\,800/6 + 1150 = \$\ 3450$$

Respuesta B

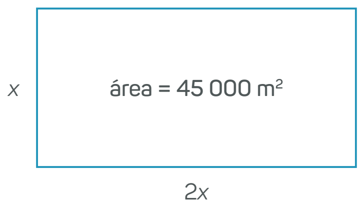
Situación problemática 3

El papá de Diego ha decidido sembrar papas de diversas variedades en un terreno que tiene en Huancayo. El terreno es de forma rectangular. El área es de 45 000 m^2 y el largo mide el doble del ancho. ¿Cuáles serán las dimensiones de dicho terreno?

A) Mide 130 m de ancho y 320 m de largo.
B) Mide 140 m de ancho y 310 m de largo.
C) Mide 150 m de ancho y 300 m de largo.
D) Mide 160 m de ancho y 290 m de largo.
E) Mide 170 m de ancho y 280 m de largo.

Solución

Leemos el problema y graficamos la situación.



Planteamos la ecuación $x(2x) = 45\,000$.

$$2x^2 = 45\,000$$

$$x^2 = 45\,000 / 2$$

$$x^2 = 22\,500$$

$$x^2 = 22\,500$$

Extraemos la raíz cuadrada de 22 500. A partir de este resultado, se sabe que el ancho mide 150 m y el largo, 300 m.

Respuesta C

Situación problemática 4

Ahora, resuelve $x^2 - 13x + 40 = 0$ por el método de factorización.

A) Conjunto solución {5; 8}
B) Conjunto solución {2; 20}
C) Conjunto solución {4; 10}
D) Conjunto solución {2; 16}
E) Conjunto solución {3; 115}

Solución

Factorizamos el trinomio por medio del método del aspa simple.

$$(x - 5)(x - 8) = 0$$

Igualamos cada factor a 0

$$x - 5 = 0 \rightarrow x = 5$$

$$x - 8 = 0 \rightarrow x = 8$$

El conjunto solución {5; 8}

Respuesta A

Situación problemática 5

¡Ahora, otra ecuación! Resuelve $4x^2 - 3x + 2 = 0$ por el método de la fórmula general.

A) Conjunto solución $\dfrac{3+\sqrt{-23}}{8}$; $\dfrac{3-\sqrt{-23}}{8}$

B) Conjunto solución $\dfrac{2+\sqrt{-23}}{8}$; $\dfrac{2-\sqrt{-23}}{8}$

C) Conjunto solución {1; 5}

D) Conjunto solución {2; 8}

E) Conjunto solución {3; 2}

Solución

Recordamos la fórmula general.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = 4 \qquad b = -3 \qquad c = 2$$

Reemplazamos datos.

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(4)(2)}}{2(4)}$$

Resolvemos.

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 32}}{8} \qquad x = \frac{3 \pm \sqrt{-23}}{8}$$

El conjunto solución es el siguiente:

$$x = \frac{3+\sqrt{-23}}{8} \; ; x = \frac{3-\sqrt{-23}}{8}$$

Respuesta A

Retos

Los retos son los desafíos que te impulsarán a desarrollar tus propias estrategias y permitirán verificar tus logros de aprendizaje. Para ello, tendrás que leer bien la situación (problema o ejercicio), comprenderla, analizar los datos, trazar un plan de acción y realizar las operaciones para comprobar luego el resultado. ¡Éxitos en tu proceso de aprendizaje!

1. Paul es 5 años mayor que Luisa y el producto de sus edades es 336. ¿Qué edad tendrá Luisa dentro de 10 años?

   A) 26
   B) 36
   C) 46
   D) 56
   E) 66

2. En el área de un terreno rectangular de 8 m x 12 m se desea construir una piscina de 32 m^2 rodeada de una vereda cuyo ancho es uniforme. Calcular el ancho que debe tener dicha vereda.

   A) 20
   B) 2
   C) 30
   D) 3
   E) 50

3. A causa de la crisis económica de su familia, Mónica, una estudiante de Ingeniería, se puso a dibujar planos de viviendas. Cuando su amigo le preguntó cuántos planos había hecho, ella le respondió: "Si a la mitad del número de planos se le quita 20 veces la inversa del número, se obtiene una cantidad igual al número de planos que he realizado menos 3". Determinar el número de planos realizados por Mónica.

   A) 100
   B) 50
   C) 25
   D) 10
   E) 20

Resolvemos los retos

Reto 1

A partir de la información del problema tenemos lo siguiente:

Edad de Paul: $x + 5$

Edad de Luisa: x

Realizamos el planteamiento de la ecuación.

$$x(x+5) = 336$$

Multiplicamos en el primer miembro y transponemos términos para igualar a 0, y resulta:

$$x^2 + 5x - 336 = 0$$

Factorizamos por medio del método del aspa simple y resulta:

$$(x + 21)(x - 16) = 0$$

Igualamos cada factor a cero.

$$x + 21 = 0 \rightarrow x_1 = -21 \qquad x - 16 = 0 \rightarrow x_2 = 16$$

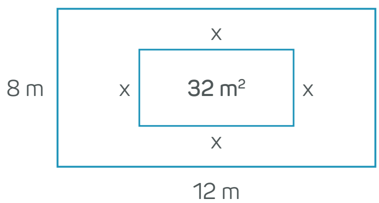
Pero se considera solo el valor positivo.

Entonces, la edad de Luisa dentro de 10 años será 26.

Respuesta A

Reto 2

Con el siguiente gráfico apreciaremos mejor los datos proporcionados.



Ancho de la vereda: x

Planteamos la ecuación.

$$(8 - 2x)(12 - 2x) = 32$$

Multiplicamos, transponemos términos y ordenamos.

$$96 - 16x - 24x + 4x^2 - 32 = 0$$

Reducimos términos semejantes.

$$4x^2 - 40x + 64 = 0$$

Dividimos toda la expresión entre 4.

$$x^2 - 10x + 16 = 0$$

Resolvemos por factorización.

$$(x - 2)(x - 8) = 0$$

Igualamos cada factor a cero.

$$x - 2 = 0 \rightarrow \quad x_1 = 2 \quad \text{y} \quad x - 8 = 0 \rightarrow \quad x_2 = 8$$

Será de 2 m de ancho. No se considera el 8 porque el ancho del terreno es 8 y no puede ser igual.

Respuesta B

Reto 3

Los datos proporcionados son los siguientes:

Número de planos: x

Planteamos la ecuación.

$$x/2 - 20(1/x) = x - 3$$

Sacamos el MCM a toda la expresión: $2x$

Dividimos y multiplicamos para buscar la ecuación equivalente sin denominadores.

$$x^2 - 40 = 2x^2 - 6x$$

Transponemos términos, simplificamos y ordenamos.

$$0 = x^2 - 6x + 40$$

Factorizamos.

$$0 = (x - 10)(x + 4)$$

Igualamos a cero cada factor.

$$x - 10 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 10$$

$$x + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x_2 = -4$$

Por lo tanto, Mónica realizó 10 planos.

Respuesta D

PREPÁRATE

SESIÓN
8

Razonamiento Matemático

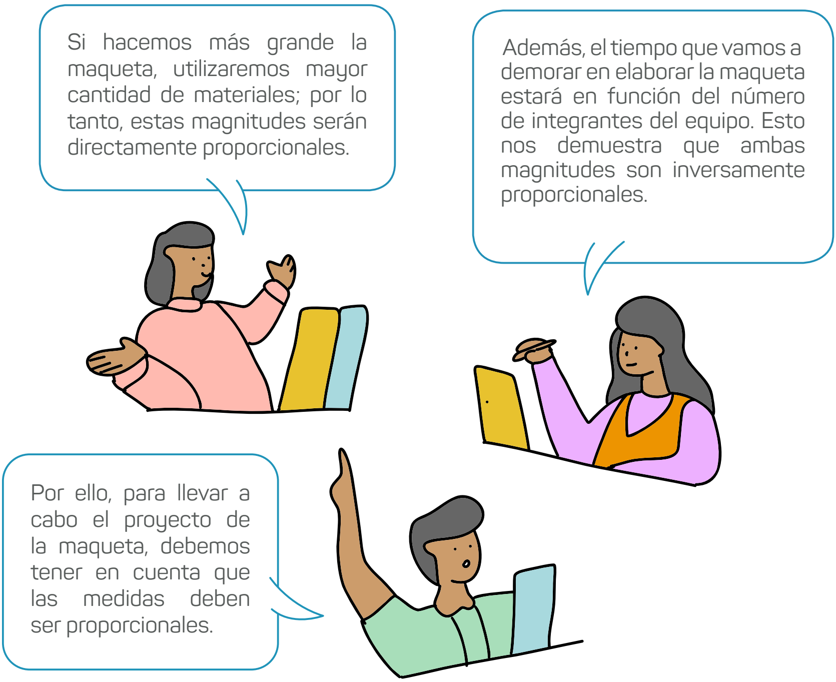
Magnitudes proporcionales

PRONABEC

PERÚ Ministerio de Educación

Actividad: Resolvemos situaciones o problemas relacionados con magnitudes proporcionales

Magnitudes proporcionales



El razonamiento matemático tiene un papel muy importante en la resolución de problemas. Los procedimientos y los pasos que utiliza son diversos, desde el uso de un lenguaje simbólico y las técnicas de cálculo hasta las estrategias heurísticas. Por medio de este razonamiento se trata de conjugar los dos aspectos de la matemática: el formativo, que está relacionado con los contenidos, y el instrumental, que conlleva a desarrollar capacidades como la generalización, la deducción, la visualización, etc.

La presente sesión propone problemas de magnitudes proporcionales y la resolución de estos por medio del razonamiento matemático. Estas se relacionan con diversos aspectos de la vida cotidiana, por ejemplo, para hacer comparaciones entre magnitudes, que comúnmente utilizamos y cuyos valores calculamos. Estas pueden ser fundamentales (tiempo, masa y longitud) y derivadas (velocidad, aceleración, presión, temperatura, etc.).

Recordamos los conceptos básicos

Magnitud

Es todo aquello que puede medirse y expresarse mediante una cantidad, como la longitud, la masa, el tiempo, el volumen, etc.

Cantidad

Es el valor que toma una magnitud en un determinado momento del análisis de una variación o cambio.

Magnitudes directamente proporcionales (DP)

Dos magnitudes son directamente proporcionales si el cociente de sus valores correspondientes es siempre una constante.

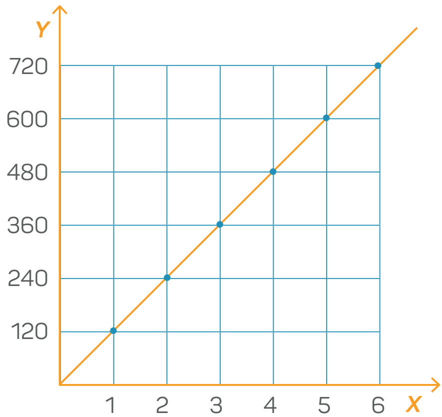
$$\text{A } \mathbf{DP} \text{ B} = \frac{\text{Valor (A)}}{\text{Valor (B)}} = k \rightarrow \text{constante de proporcionalidad}$$

Magnitudes inversamente proporcionales (IP)

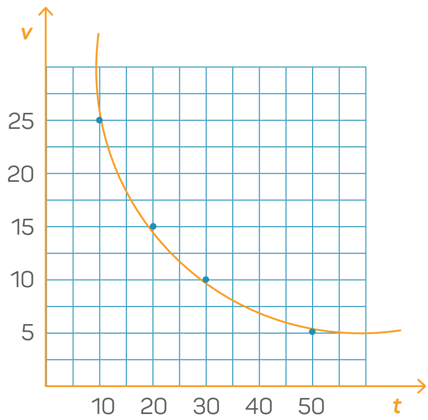
Dos magnitudes son inversamente proporcionales si el producto de sus valores correspondientes es siempre una constante.

$$\text{A } \mathbf{IP} \text{ B} = (\text{Valor A})(\text{Valor B}) = k \rightarrow \text{constante de proporcionalidad}$$

Gráficas de magnitudes proporcionales en el plano cartesiano



Magnitudes DP



Magnitudes IP

Regla de tres simple

Es una aplicación de la proporcionalidad directa o de la proporcionalidad inversa, que consiste en hallar un valor desconocido a partir del conocimiento de tres cantidades que, en conjunto, forman una proporción geométrica.

Regla de tres simple directa

Es aquella en la que intervienen magnitudes directamente proporcionales. Si una de ellas aumenta o disminuye, la otra también aumenta o disminuye.

Regla de tres simple inversa

Es aquella en la que intervienen magnitudes inversamente proporcionales. Si una de ellas aumenta, la otra disminuye y viceversa.

Situaciones problemáticas

Situación problemática 1

La mamá de un estudiante de Tacna confecciona mascarillas lavables y reutilizables y ha recibido pedidos de varias empresas que se dedican a la venta de este tipo de mascarillas. Si ella trabaja en el taller con 2 operarios un total de 8 horas diarias para confeccionar 80 mascarillas, ¿cuántos operarios más serán necesarios para confeccionar la misma cantidad de mascarillas trabajando solo 2 horas diarias, de manera que se pueda cumplir con todos los pedidos?

A) 4
B) 6
C) 2
D) 8
E) 5

Solución:

Elaboramos una tabla con los datos.

Número de horas	8 horas	2 horas
Número de operarios	2 operarios	x operarios

Observamos que si las horas disminuyen, el número de operarios debe aumentar; por lo tanto, las magnitudes son inversamente proporcionales.

Formamos la proporción invirtiendo la primera razón.

$$\frac{2}{8} = \frac{2}{x} \rightarrow 2x = (2)(8) \rightarrow x = 8$$

El número total de operarios que se necesita es 8.
Luego, el incremento es de 6 operarios.

Respuesta B

Situación problemática 2

Ricardo decide construir una casa prefabricada en 18 días, pero demoró 6 días más en culminar la obra porque trabajó 2 horas menos cada día. ¿Cuántas horas diarias trabajó?

A) 5
B) 7
C) 12
D) 8
E) 6

Solución:

Número de horas trabajadas en 18 días → x

Número de días	Número de horas por día
18	x
18 + 6	$x - 2$

Como las magnitudes son IP, entonces invertimos la primera razón y formamos la proporción.

$$\frac{24}{18} = \frac{x}{x-2}$$

Aplicamos la propiedad fundamental para calcular el número de horas programado inicialmente.

$24(x-2) = 18x$
$6x = 48$
$x = 8$

El número de horas programadas para trabajar cada día es 8.

Sin embargo, como trabajó 2 horas menos cada día, entonces 8 - 2 = 6 horas

Respuesta E

Situación problemática 3

Para la elaboración de 6 bloques compactos de forma cúbica se han empleado 96 kg de cemento. ¿Cuántos kilogramos de cemento se emplearán para construir 2 bloques más de igual forma cuya arista mida el doble de los 6 bloques ya construidos?

A) 192
B) 288
C) 270
D) 256
E) 224

Solución:

Colocamos los datos en una tabla con las equivalencias de número de cubos, volúmenes y kilogramos.

Número cubos	de kilogramos	Volumen
6	96	$6a^3$
1	96/6= 16	a^3
2	x	$2(2a)^3$

Comparamos kilogramos y volúmenes.

$$\frac{16}{x} = \frac{a^3}{2(2a)^3}$$

$16(2)(2a)^3 = x(a^3)$
$32(8a^3) = x(a^3)$
$256 = x$

Luego, se necesitan 256 kg de cemento.

Respuesta D

Situación problemática 4

La masa corporal de un hipopótamo es proporcional a la raíz cuadrada de su edad. Si un hipopótamo a los 25 años tiene una masa de 200 kg, ¿cuál será su masa después de 11 años si consideramos que no se altera su dieta alimentaria?

A) 240
B) 96
C) 80
D) 260
E) 120

Solución:

Establecemos los datos.

Masa	Edad
M	$\sqrt{E}$
200 kg	$\sqrt{25}$
x	$\sqrt{25+11}$

Las magnitudes son directamente proporcionales (DP).

Formamos la proporción.

$$\frac{200}{x} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}} \rightarrow 200\sqrt{36} = \sqrt{25}x$$

$200(6) = 5x$
$1200/5 = x$
$240 = x$

Respuesta A

Retos

Los retos son los desafíos que te impulsarán a desarrollar tus propias estrategias y permitirán verificar tus logros de aprendizaje. Para ello, tendrás que leer bien la situación (problema o ejercicio), comprenderla, analizar los datos, trazar un plan de acción y realizar las operaciones para comprobar luego el resultado. ¡Éxitos en tu proceso de aprendizaje!

Reto 1

Una familia de 6 integrantes tiene víveres para 30 días. Faltando x días para que se terminen los víveres recibieron la visita de 3 familiares; por ello, los víveres les duraron 2 días menos. Calcula x.

A) 4
B) 8
C) 2
D) 3
E) 6

Reto 2

El padre de Jaime desea repartir S/ 1200 en forma DP a las edades de sus tres hijos: 5; 7 y 3, respectivamente. ¿Qué cantidad le corresponde al menor?

A) 400
B) 240
C) 560
D) 150
E) 120

Reto 3

Santiago pagó una determinada cantidad de dinero para que pinten la fachada de su casa. El pago varía de manera directamente proporcional (DP) al cuadrado del número de galones de pintura que se utilizaron y también varía de forma inversamente proporcional (IP) al tiempo empleado. Si para pintar su casa se utilizaron 12 galones de pintura y se emplearon 18 h, ¿cuántos galones se utilizaron para pintar la casa de su hermano por la que se pagó el doble y se demoraron 16 h en pintarla?

A) 8
B) 9
C) 12
D) 16
E) 15

Reto 4

María, que es una organizadora de eventos, observa que los gastos que realiza en una fiesta son directamente proporcionales al número de invitados e inversamente proporcionales a las horas que dura la reunión. La última vez que organizó una fiesta gastó S/ 1200 e invitó a la reunión a 100 personas, y la fiesta duró 12 horas. ¿Cuánto menos le costará la organización de la fiesta si solo hay 80 invitados y la fiesta demora 4 horas más?

A) 320
B) 480
C) 600
D) 540
E) 720

Reto 5

Se sabe que 30 albañiles con igual habilidad construyen una casa en 30 días. Al cabo de 10 días, solo han hecho 1/4 de la obra. ¿Cuántos albañiles más se tendrán que contratar para terminar la obra en el plazo fijado?

A) 15
B) 20
C) 45
D) 10
E) 30

Reto 6

Una empresa constructora estudia el tiempo que emplea un grupo de obreros para realizar una obra, y se obtienen los siguientes datos:

Número de obreros	10	5	20	4
Número de días	50	100	25	125

Si el número de trabajadores se aumentara a 120, ¿en cuántos días se terminaría la obra?

A) 4 días y 4 horas
B) 4 días y 6 horas
C) 4 días y 2 horas
D) 4 días y 1 hora
E) 4 días y 3 horas

Resolvemos los retos

Reto 1

Elaboramos un cuadro con los siguientes datos:

Número de personas	6	9
Número de días	30 - x	x - 2

Calculamos el consumo para 6 integrantes.

$6(30) = 180$

Formamos la ecuación sabiendo que son magnitudes IP.

$6(30 - x) + 9(x - 2) = 180$
$180 - 6x + 9x - 18 = 180$
$3x = 18$
$x = 6$

Luego, serían 6 los días que faltarían.

Respuesta E

Reto 2

Cantidad de dinero total: S/ 1200

Edades de los hijos: 3; 5 y 7

Sean *a*; *b* y *c* las cantidades que recibirán y que son proporcionales a 3; 5 y 7

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7} = k$$

$a = 3k$; $b = 5k$ y $c = 7k$

Sumamos.

$$3k + 5k + 7k = 1200$$
$$15k = 1200$$
$$k = 80$$

Al menor le corresponde lo siguiente:

$$3k = 3(80) = S/\ 240$$

Respuesta B

Reto 3

Costo del pintado → C
Número de galones → G
Tiempo → T

C (soles)	G	T (horas)
x	12	18
$2x$	y	16

Sabemos:
C DP G^2
C IP T
Calculamos la constante de proporcionalidad k.

$$k = \frac{C.T.}{G^2}$$

Formamos la proporción

$$\frac{(x)(18)}{12^2} = \frac{(2x)(16)}{y^2}$$

Simplificamos y despejamos y.

$$y^2 = \frac{(144)(32)}{18} = 256 \rightarrow y = 16$$

Luego, el número de galones será 16.

Respuesta D

Reto 4

Solución

Gastos → G
Número de invitados → I
Tiempo → T

G (soles)	I	T (horas)
1200	100	12
x	80	12 + 4

Sabemos:
G IP T
G DP I

Calculamos la constante de proporcionalidad k.

$$\frac{G.T.}{I} = k$$

Formamos la proporción con los datos.

$$k = \frac{1200(12)}{100} = \frac{x(16)}{80}$$

Simplificamos y despejamos la x.

$$x = 144(5) = 720$$

Como se quiere saber cuánto menos será el costo, restamos 1200 – 720 = 480.

Luego, el costo se reduce en S/ 480.

Respuesta B

Reto 5

Solución

Número de obreros que se deben contratar → x

Si en 10 días solo han hecho 1/4 de la obra, faltan 20 días y 3/4 de la obra.

Organizamos los datos en una tabla.

Número de obreros	Número de días	Obra
30	10	1/4
$30 + x$	20	3/4

IP

DP

Recuerda:

Cuando se establece la comparación, por lo menos, entre dos proporciones, se aplica la regla de tres compuesta.

Planteamos la relación.

$$\frac{30}{30 + x} = \frac{20}{10} = \frac{1/4}{3/4}$$

Despejamos $30 + x$.

$$(30+x)(20)(3/4) = (30)(10)(1/4)$$

$$30 + x = \frac{(30)(10)(1/4)}{(20)(3/4)}$$

$$30 + x = 45$$
$$x = 45 - 30 = 15$$

Habrá que contratar 15 obreros más.

Respuesta A

Reto 6

Solución

Analizamos la tabla y observamos que si aumenta el número de obreros, el número de días disminuye y viceversa; por lo tanto, las magnitudes son inversamente proporcionales (IP).

Número de obreros	10	5	20	4
Número de días	50	100	25	125

Calculamos la constante de proporcionalidad k.

$$k = 10(50) = 5(100) = 20(25) = 4(125) = 500$$
$$k = 500$$

$$120(x) = 500 \rightarrow x = 4\ \frac{1}{6}$$

Se terminaría en 4 días y 4 horas.

Respuesta A

Curiosidades:

La inscripción "los cuatro cuatros" nos recuerda una maravilla del cálculo. Esta consiste en emplear cuatro veces el número 4 para formar un número cualquiera.

¿Quieres formar el cero?

$44 - 44 = 0$

$4 + 4 - 4 - 4 = 0$

Ahora, pasemos a formar el dos y el tres.

$\frac{4}{4} + \frac{4}{4} = 2 \quad ; \quad \frac{4+4+4}{4} = 3$

Finalmente, te reto a escribir los números del 1 al 10 utilizando solo cuatro cuatros.

PREPÁRATE

SESIÓN

9

Razonamiento Matemático

Sucesiones

PRONABEC

PERÚ Ministerio de Educación

Actividad: Utilizamos nuestros conocimientos previos sobre sucesiones para resolver problemas cotidianos

Sucesiones

Recordamos conceptos básicos

Sucesión

Es un conjunto de números dados ordenadamente, de modo que se puedan numerar de acuerdo con una ley de formación.

Se denota así: $\{a_n\}$, donde n pertenece al conjunto de los números naturales.

Se denomina **n** al número del término.

Ejemplo

11; 21; 31; 41; 51...

a_1; a_2; a_3; a_4; a_5...

Clases de sucesiones

Sucesión aritmética. Es aquella en la cual para hallar el término siguiente se le suma una cantidad.

Ejemplo

3; 7; 11; 15; 19; ...

Sucesión geométrica. Es aquella en la que para hallar el término siguiente se le multiplica una cantidad.

Ejemplo

$2a^2$; $6a^2$; $18a^2$; $54a^2$; ...

Sucesión alternada. Se caracteriza porque cada término tiene el signo contrario que el del término que le precede.

Ejemplo

−1; 2; −3; 4; ...

Sucesión finita. Tiene un número determinado de términos.

Ejemplo

5; 8; 16; 19; 38

Sucesión infinita. No tiene un número determinado de términos.

Ejemplo

Números múltiplos de 3 mayores que 1.

3; 6; 9; 12; 15; ...

Ley de formación o término n-ésimo

$a_n = a_1 + (n - 1d)$

a_1 = primer término

a_n = n-ésimo término

n = número de términos

d = diferencia

Las sucesiones se observan en varios fenómenos naturales, como en la estructura de la flor del girasol; en los intereses bancarios; en la industria (para saber cuántos productos se fabrican); en los números primos; entre otros casos.

Podemos ver la secuencia de los números que se forman y esa es una sucesión creciente.

1; 2; 4; 8; 16; 32; ...

Esta secuencia la podemos representar mediante una fórmula general: $N = 2^n$, donde n representa el número de términos de la secuencia. En este caso, n sería la cantidad de minutos.

0 minutos $2^0 = 1$

1 minuto $2^1 = 2$

2 minutos $2^2 = 4$

3 minutos $2^3 = 8$

Generalizando: $a_{(n)} = 2^n$

Si la ley de formación es $\{-n^2 + 1\}$, los términos de la sucesión se hallarán reemplazando n por 1, por 2, por 3, y así sucesivamente, y efectuando las operaciones indicadas.

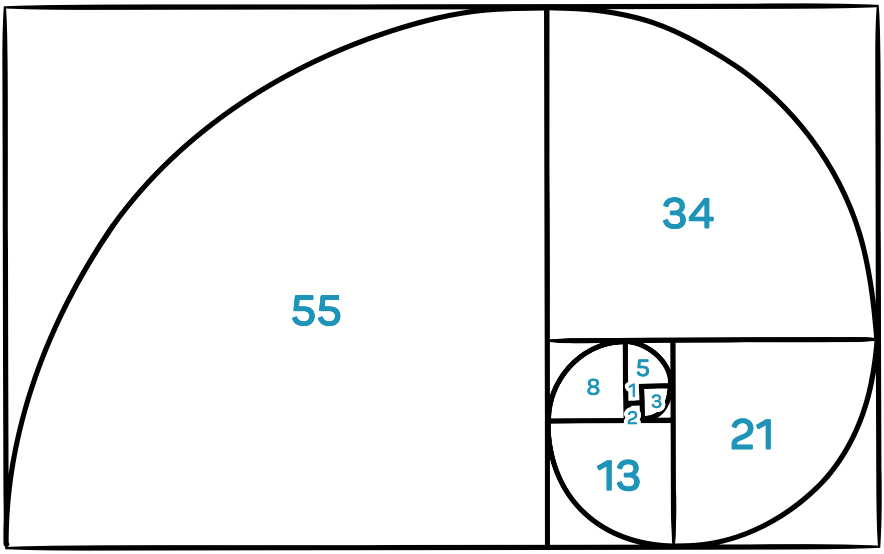
$a_1 \rightarrow -(1)^2 + 1 \rightarrow a_1 = 0$

$a_2 \rightarrow -(2)^2 + 1 \rightarrow a_2 = -3$

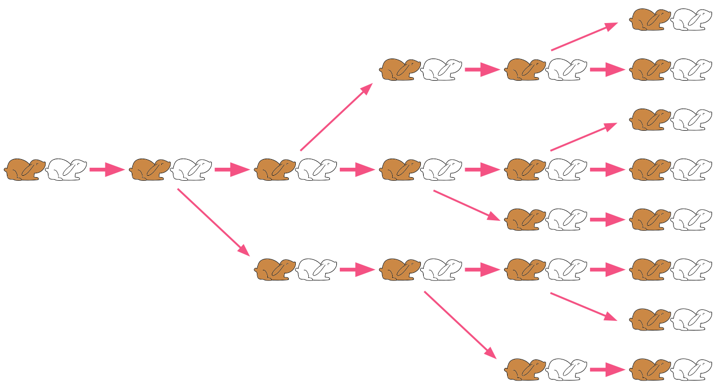
$a_3 \rightarrow -(3)^2 + 1 \rightarrow a_3 = -8$

$a_4 \rightarrow -(4)^2 + 1 \rightarrow a_4 = -15$

Sucesión de Fibonacci

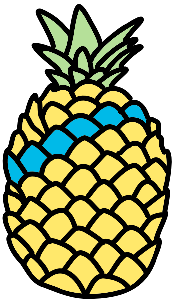


Secuencia de Fibonacci en los conejos

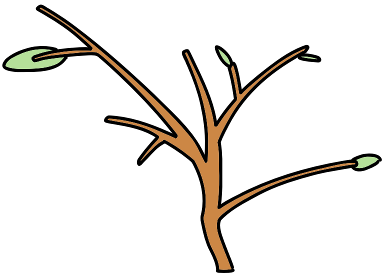


MESES	0	1	2	3	4	5
PAREJAS	1	1	2	3	5	8

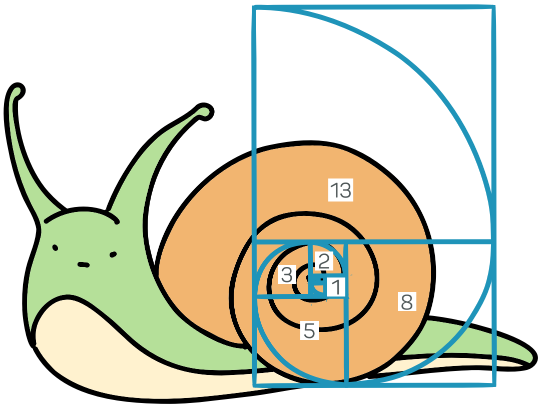
Secuencia de Fibonacci: una rosa, una piña y un caracol



5 filas
8 filas
13 filas



5 ramas
3 ramas
2 ramas
1 tronco



Situaciones problemáticas

Situación problemática 1

El otro día leí en una revista que los conejos tardan dos meses para alcanzar la madurez y poder parir. Después de eso, dan a luz otro par de conejos cada mes. El problema inicial es saber cuántos pares de conejos habría en un mes determinado. Luego, resuelve la siguiente pregunta: ¿cuántas parejas habrá al cabo de 10 meses?

A) 89

B) 55

C) 34

D) 21

E) 13

Solución

Durante el mes 0 tienes un par de conejos, pero como no han madurado, no pueden reproducirse.

Durante el primer mes todavía hay un 1 solo par.

Pero a fines del segundo mes, la primera pareja se reproduce por primera vez, por lo que hay 2 pares de conejos.

Al iniciarse el tercer mes, el primer par se reproduce de nuevo, pero el segundo par no está lo suficientemente maduro, por lo que hay 3 pares.

En el cuarto mes, el primer par se reproduce, y el segundo par se reproduce por primera vez, pero el tercer par es todavía muy joven, por lo que hay 5 pares.

El ritual de apareamiento continúa, pero lo que pronto notarás es que la cantidad de parejas de conejos que tienes en un mes dado es la suma de las parejas de conejos que has tenido en cada uno de los dos meses anteriores. Por ello, la secuencia continúa.

Esta es la sucesión de Fibonacci, cuya secuencia es la siguiente: 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21..., y sigue hasta el infinito.

¿Cómo lo calcularíamos?

0 + 1 = 1

1 + 1 = 2

1 + 2 = 3

2 + 3 = 5

3 + 5 = 8

5 + 8 = 13

8 + 13 = 21

13 + 21 = 34

21 + 34 = 55

34 + 55 = 89

Al décimo mes serán 89 parejas.

Respuesta A

Situación problemática 2

Un concurrido estacionamiento para autos cobra S/ 1,50 por la primera hora de parqueo y por cada hora siguiente, el doble del costo de la hora anterior. ¿Cuánto se pagará por estacionar el auto durante 7 horas?

A) S/ 10,50
B) S/ 12
C) S/ 24
D) S/ 48
E) S/ 96

Solución

Leemos de nuevo el problema y vamos deduciendo los datos.

Para entender mejor la situación, utilizamos una tabla.

N.° horas	1	2	3	4	5	6	7
Precio	S/ 1,50	S/ 3	S/ 6	S/ 12	S/ 24	S/ 48	S/ 96

Se pagará S/ 96.

Respuesta E

Situación problemática 3

Un día, en una clase, les mostré una sucesión a mis estudiantes y les indiqué que hallaran la ley de formación de dicha sucesión. Ellos, muy entusiastas, hicieron los cálculos, pero me presentaron dos fórmulas distintas. Por un lado, Rosita, quien representaba a las mujeres, decía que su fórmula era la correcta. Por otro lado, Luis, quien representaba a los hombres, decía que no, que la fórmula correcta era la de él. ¿Cuál es la correcta?

La sucesión fue la siguiente: 6; 21; 46; 81; ...

Las fórmulas fueron las siguientes:

Rosita $\{5n^2 + 1\}$ y Luis $\{4n^n + 2\}$.

A) Rosita
B) Luis
C) Ambos
D) María
E) José

Solución

Una forma de constatar cuál es la fórmula correcta es ir reemplazando los valores de n por 1, por 2, por 3, y efectuar las operaciones indicadas.

Elaboramos un cuadro comparativo.

Fórmula 1	$\{5n^2 + 1\}$	Reemplazo el valor de n.	$\{5(1)^2 + 1\} = 6$ $\{5(2)^2 + 1\} = 21$ $\{5(3)^2 + 1\} = 46$ $\{5(4)^2 + 1\} = 81$
Fórmula 2	$\{4n^n + 2\}$	Reemplazo el valor de n.	$\{4(1)^1 + 2\} = 6$ $\{4(2)^2 + 2\} = 18$ $\{4(3)^3 + 2\} = 110$

Como podemos observar, los términos cumplen la primera fórmula.

Entonces, la fórmula correcta es la primera, es decir, la de Rosita: $\{5n^2 + 1\}$.

Respuesta A

Situación problemática 4

Veamos la sucesión: 1; 3; 6; 10; ... Hallar el término que ocupa el lugar 150.

A) 14 350
B) 13 690
C) 10 150
D) 11 325
E) 12 650

Solución

Deducimos la fórmula.

Multiplicamos 1 por el número siguiente y luego dividimos entre 2.

$a_1 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \quad \rightarrow 1(2 / 2)$

Multiplicamos 2 por el número siguiente y luego dividimos entre 2.

$a_2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 + 2 \rightarrow 2(3 / 2)$

Multiplicamos 3 por el número siguiente y luego dividimos entre 2.

$a_3 \rightarrow 6 \rightarrow 1 + 2 + 3 \rightarrow 3(4 / 2)$

Multiplicamos 4 por el número siguiente y luego dividimos entre 2.

$a_4 \rightarrow 10 \rightarrow 1 + 2 + 3 + 4 \rightarrow 4(5 / 2)$

Luego, continuamos así sucesivamente.

Entonces, si queremos hallar el término del lugar 150, se tendría que realizar lo siguiente:

Multiplicamos 150 por el número siguiente y luego dividimos entre 2.

$a_{150} \rightarrow 150(151 / 2) \rightarrow \ a_{150} = 11\,325$

El término sería 11 325.

Respuesta D

Situación problemática 5

La fórmula de una sucesión aritmética es $\{a_n\} = 3 - 4(n - 1)$. Calcular el producto del cuarto término y el octavo.

A) 9

B) 25

C) 108

D) 90

E) 50

Solución

Calculamos el cuarto término.

$$a_4 = 3 - 4(4 - 1) = 3 - 12 = -9$$

Calculamos el octavo término.

$$a_8 = 3 - 4(8 - 1) = 3 - 28 = -25$$

Producto: $(-9)(-25) = 225$

Respuesta C

Retos

Los retos son los desafíos que te impulsarán a desarrollar tus propias estrategias y permitirán verificar tus logros de aprendizaje. Para ello, tendrás que leer bien la situación (problema o ejercicio), comprenderla, analizar los datos, trazar un plan de acción y realizar las operaciones para comprobar luego el resultado. ¡Éxitos en tu proceso de aprendizaje!

1. A Irma y a Javier se les pidió que encontraran la ley de formación de la sucesión 14; 5; −4; −13; ... Irma dijo que la fórmula era $\{a_n\} = \{14 - 9(n - 1)\}$, y Javier dijo que era $\{a_n\} = \{14 - 9n\}$. ¿Cuál de los dos tiene la razón?

   A) Irma

   B) Javier

   C) Ambos

   D) María

   E) José

2. Una empresa reparte vales de descuento a sus clientes. Al primer cliente le dio 1; al segundo, 2; al tercero, 3; y así sucesivamente. Si solo tenía 105 vales, ¿cuántos clientes recibieron tan peculiar tipo de reparto de vales?

   A) 10
   B) 14
   C) 18
   D) 20
   E) 23

3. Si la ley de formación de una sucesión es $\{n^2 - 5\}$, calcular la suma de $a_3 + a_5 - 3a_7$.

   A) −25
   B) 75
   C) −108
   D) 156
   E) 50

Resolvemos los retos

Reto 1

Para saber cuál de ellos tiene la razón podemos utilizar una tabla de comparación, en la cual reemplazamos los valores de n en cada fórmula y resolvemos las operaciones indicadas.

	Irma	Javier
Fórmula	$\{14 - 9(n - 1)\}$	$\{14 - 9n\}$
$n = 1$	$\{14 - 9(1 - 1)\} = 14$	$\{14 - 9(1)\} = 5$
$n = 2$	$\{14 - 9(2 - 1)\} = 5$	$\{14 - 9(2)\} = -4$
$n = 3$	$\{14 - 9(3 - 1)\} = -4$	$\{14 - 9(3)\} = -13$
$n = 4$	$\{14 - 9(4 - 1)\} = -13$	$\{14 - 9(4)\} = -22$

Podemos que ver que la que cumple con todos los valores es la de Irma. Por lo tanto, ella dio la fórmula correcta.

Respuesta A

Reto 2

Este problema se puede resolver por simple cálculo o aplicando sumatorias.

La sucesión que se forma con los datos sería la siguiente:

1; 2; 3; 4; ...

La sumatoria sería la siguiente:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \ldots = 105$$

Como son números naturales, la suma de los "n" números está dada por la fórmula $S = n(n + 1) / 2$.

Reemplazamos en la fórmula.

$$105 = n(n + 1) / 2$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado.

$$210 = n^2 + n$$

Ordenamos y factorizamos.

$$n^2 + n - 210 = 0$$

$$(n - 14)(n + 15) = 0$$

Igualamos cada factor a 0.

$$n - 14 = 0 \rightarrow n_1 = 14 \quad \wedge \quad n + 15 = 0 \rightarrow n_2 = -15$$

El total de vales lo recibieron solo 14 clientes.

Respuesta B

Reto 3

Reemplazamos en la fórmula general o n-ésima los valores de posición de los términos.

$a_3 = (3)^2 - 5 = 4$

$a_5 = (5)^2 - 5 = 20$

$a_7 = (7)^2 - 5 = 44$

La expresión que nos piden calcular será la siguiente:

$a_3 + a_5 - 3a_7 = 4 + 20 + 3(44) = -108$

El resultado es -108.

Respuesta C

PREPÁRATE

SESIÓN
10

Razonamiento Matemático

Porcentajes I

PRONABEC

PERÚ Ministerio de Educación

Actividad: Resolvemos situaciones o problemas que involucren el uso de los porcentajes

Porcentajes I

¡Qué buenas ofertas hemos encontrado en esta tienda! Todos los precios están rebajados y hay buenos porcentajes de descuento.

Compraré varios cuadernos para todos mis cursos de la academia.

Sí, hay que aprovechar la ocasión y comprar cuando hay descuentos. Eso nos alivia un poco el presupuesto familiar y mucho más si los precios están con un 50 % o 70 % de descuento. Yo compraré algunos libros que necesito para estudiar y prepararme para el ingreso a la universidad.

En el comercio, la economía, la contabilidad, la estadística, así como en la administración en general y en otras ciencias, el tema del porcentaje, también conocido como “el tanto por ciento”, y las variaciones porcentuales son indispensables. En muchas situaciones prácticas es necesario hallar el porcentaje de algún valor específico: precios, salarios, tiempos, superficies, etc.

Esta expresión matemática es una de las más conocidas y utilizadas, por ejemplo, cuando se refieren a la economía familiar o a la inflación. Vemos y escuchamos este término diariamente en los medios de información como una constante. En efecto, se hace uso del porcentaje, por ejemplo, para expresar el alza de precios de los productos de primera necesidad o la disminución de sueldos. También se emplea en estadística, por ejemplo, para informar sobre el incremento de madres adolescentes o el aumento de casos de la COVID-19 por motivo de la pandemia.

En estas y otras muchas situaciones se suele utilizar un valor porcentual. Por ello, es importante su estudio.

Recordamos los conceptos básicos

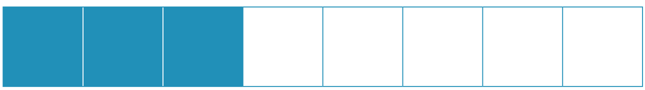
Tanto por cuanto

Es un procedimiento aritmético que consiste en dividir en partes iguales un todo y tomar tantas partes como se indique.

Ejemplo

$$3 \text{ por } 8 = \frac{3}{8}$$

Si lo representamos gráficamente, equivale a 3 partes de un total de 8 partes.



También se puede expresar como $\frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5\ \%$.

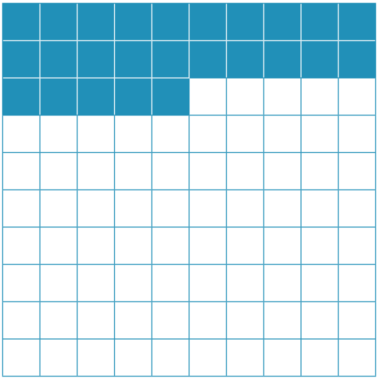
Tanto por ciento

Es el procedimiento aritmético que consiste en dividir un todo en 100 partes iguales y tomar tantas partes como se indique.

Ejemplo

$$25\% = \frac{25}{100}$$

Si lo representamos gráficamente, equivale a tomar 25 partes de un total de 100.



Porcentaje

Es el resultado de aplicar el tanto por ciento a una cantidad y su símbolo es %, que se lee *por ciento*.

Ejemplo

Hallar el 60 % de 350.

$$60\ \%\ (350) = \frac{60}{100}\ (350) = 210$$

$$60\ \%\ (350) = 210$$

El porcentaje se puede expresar en forma de fracción decimal o en forma de fracción ordinaria.

Ejemplo

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \textbf{A}}}{46\ \%} = \underset{\substack{\uparrow \\ \textbf{B}}}{\frac{46}{100}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \textbf{C}}}{0{,}46} = \underset{\substack{\uparrow \\ \textbf{D}}}{\frac{23}{50}}$$

A: Porcentaje
B: Fracción decimal o razón geométrica
C: Expresión decimal
D: Fracción ordinaria

Variación porcentual

Es el cambio que experimenta una cantidad con relación a su valor original y que es expresado en tanto por ciento.

V = (*Aumento o disminución del valor inicial*)(100 %)

En las operaciones con porcentajes se cumple lo siguiente:

$a\ \%\ N \pm b\ \%\ N = (a \pm b)\ \%\ N$

$N \pm a\ \%\ N = (100 \pm a)\ \%\ N$

Situaciones problemáticas

Situación problemática 1

Jaime es un joven emprendedor que desea establecer un negocio de productos artesanales junto con su hermano Manuel. Jaime invertirá el 50 % de su capital, que en total es S/ 760, y Manuel, el 40 % de su sueldo mínimo, que es S/ 930. Jaime le ha dicho a su hermano que ambos invertirán el 45 % de la suma de sus capitales. Sin embargo, Manuel le ha respondido que está equivocado, que no es así. ¿A qué porcentaje equivale lo invertido por ambos?

A) 44 %
B) 46 %
C) 42 %
D) 44,5 %
E) 4,45 %

Solución

Jaime invertirá el 50 % de S/ 760.

$$50\%\,(760) = \frac{50}{100}(760) = 380$$

Manuel invertirá el 40 % de S/ 930.

$$40\,\%\,(930) = \frac{40}{100}(930) = 372$$

Para saber si ambos invertirán el 45% de la suma de sus capitales, planteamos la siguiente ecuación:

$$\frac{(50\,\% + 40\,\%)(760 + 930)}{2} = 50\,\%\,(760) + 40\,\%\,(930)$$

$$\frac{90\,\%\,(1690)}{2} = 380 + 372$$

$$760{,}5 \neq 752$$

Ahora, aplicamos la regla de tres para comprobar si lo invertido es el 45 %.

$$\begin{array}{ll} 100\ \% & \rightarrow 1690 \\ x & \rightarrow\ 752 \end{array}$$

$$X = \frac{752(100\%)}{1690} = 44{,}5\ \%$$

Luego, solo invierten el 44,5 % de los capitales.

Respuesta D

Situación problemática 2

Ángel tiene una granja donde cría pavos y gallinas. Si el 30% de las gallinas es el 20% del número de pavos, ¿cuál es el porcentaje del número de pavos respecto del total?

- **A)** 60 %
- **B)** 62 %
- **C)** 64 %
- **D)** 68 %
- **E)** 80 %

Solución

Porcentaje a calcular → $x\ \% = \dfrac{\textit{número de pavos}}{\textit{total de aves}}$

Sabemos que el 30 % de gallinas = 20 % de pavos.

Comparamos.

$$\frac{30}{100}g = \frac{20}{100}p$$

Simplificamos la expresión.

$$\frac{g}{p} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{g}{p} = \frac{2k}{3k} \rightarrow 2k + 3k = 5k \text{ total de aves}$$

Calculamos el porcentaje.

$$x\,\% = \frac{\textit{número de pavos}}{\textit{total de aves}}$$

$$x\,\% = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5} = 0{,}6 = 60\,\%$$

El porcentaje es 60 %.

Respuesta A

Situación problemática 3

Se realiza una encuesta a cierto grupo de clientes de una heladería sobre el sabor del helado que más les agrada. Las opciones de la encuesta fueron fresa, vainilla, chocolate y otros. Los resultados se muestran en el siguiente gráfico. Si 84 personas de los encuestados prefieren el sabor a chocolate o a vainilla, ¿cuántos encuestados prefieren el sabor a fresa?[1]

- Fresa: 52%
- Chocolate: 16%
- Vainilla: 12%
- Otros: 20%

A) 186
B) 256
C) 156
D) 168
E) 104

Solución

Calculamos el porcentaje de los que prefieren chocolate o vainilla.

$$Ch + V = 16\,\% + 12\,\% = 28\%$$

[1] Centro Preuniversitario de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos. (2019). CEPREUNMSM.

Comparamos y aplicamos la regla de tres.

$84 \rightarrow 28\ \%$

$x \rightarrow 52\ \%$

$$x = \frac{84(52\ \%)}{28\ \%} = 156$$

Prefieren solo fresa 156 personas.

Respuesta C

Situación problemática 4

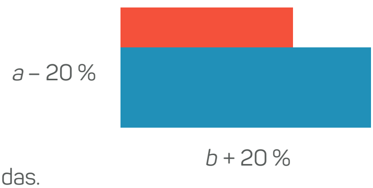
Si el largo de un terreno rectangular se incrementa en 20% y su ancho disminuye en 20 %, ¿cuál es la variación porcentual del área del terreno?

A) Aumenta en 4 %.
B) Disminuye en 4 %.
C) No varía.
D) Aumenta en 10 %.
E) Disminuye en 10 %.

Solución

Representamos simbólica y gráficamente.

Área original = $b.h \rightarrow 100\ \%$
Largo $\rightarrow b + 20\ \% = 120\ \%$
Ancho $\rightarrow a - 20\ \% = 80\ \%$



Calculamos el área con las nuevas medidas.

$$A_{\text{Final}} = (120\ \%)(80\ \%)$$

$$A_{\text{Final}} = \left(\frac{120}{100}\right)\left(\frac{80}{100}\right) = \frac{96}{100} = 96\ \%$$

Por lo tanto, el área disminuyó en un 4 %.

Respuesta B

Retos

Los retos son los desafíos que te impulsarán a desarrollar tus propias estrategias y permitirán verificar tus logros de aprendizaje. Para ello, tendrás que leer bien la situación (problema o ejercicio), comprenderla, analizar los datos, trazar un plan de acción y realizar las operaciones para comprobar luego el resultado. ¡Éxitos en tu proceso de aprendizaje!

Reto 1

Un comerciante utiliza una estrategia de venta que consiste en incrementar el precio de los artículos en un 30 % y después anuncia una rebaja del 30 % en su precio. ¿Cuál es la variación porcentual de los nuevos precios respecto al precio inicial del artículo?

A) No gana ni pierde.
B) Pierde 4 %.
C) Gana 4 %.
D) Pierde 9 %.
E) Gana 9 %.

Reto 2

Un granjero tiene una producción diaria de 750 huevos de gallina. Sin embargo, durante el embalaje, el 1 por 30 de los huevos se rompe, y el 1 por 25 del resto se encuentra defectuoso. ¿Cuántos huevos en buenas condiciones pueden venderse diariamente?

A) 690
B) 655
C) 684
D) 696
E) 694

Reto 3

Corina vendió dos casacas diferentes a S/ 60 cada una. Si en una casaca ganó el 20 % y en la otra casaca perdió el 20 % de su precio de costo, ¿cuánto ganó o perdió en total Corina?

A) Ganó S/ 5.
B) Perdió S/ 10.
C) Perdió S/ 5.
D) Perdió S/ 15.
E) Ganó S/ 10.

Reto 4

En un proceso de admisión para un instituto superior, el coordinador observó que el 4 % de los postulantes no se habían presentado, el 20 % no había alcanzado el puntaje requerido y 380 postulantes habían ingresado satisfactoriamente. ¿Cuántos estudiantes postularon a la institución?

A) 400
B) 500
C) 640
D) 570
E) 1140

Reto 5

Las medidas de una lámina triangular son de 60 cm de base y 50 cm de altura. Si la base de la lámina se aumenta en 30 % y su altura en un 50 %, calcular la variación porcentual de dicha superficie.

A) 88 %
B) 5 %
C) 22 %
D) 95 %
E) 87 %

Reto 6

Calcular el número por el que se debe multiplicar el radio de un terreno circular cuya área aumentó en un 2500 %.

A) 5
B) 6
C) 7
D) 8
E) 4

Resolvemos los retos

Reto 1

Precio original → $P = 100\ \%$

Precio incrementado → $PI = 100\ \% + 30\ \% = 130\ \%$

Precio rebajado → $PR = 100\ \% - 30\ \% = 70\ \%$

Precio Final → $PF = 130\ \%(70\ \%) = \frac{130}{100}(70\ \%) = 91\ \%$

Comparamos con el precio inicial.

$100\ \% - 91\ \% = 9\ \%$

Por lo tanto, el precio inicial disminuye en un 9 %.

Respuesta D

Reto 2

Producción diaria: 750 huevos

R → 1 por 30 se rompen.

D → 1 por 25 del resto son defectuosos.

Calculamos R y D estableciendo las razones.

$$R = \frac{1}{30}(750) = 25$$

$$D = \frac{1}{25}(725) = 29$$

Cantidad que se vende:

$V = 750 - 25 - 29$
$V = 696$

Respuesta D

Reto 3

Precio de venta = Costo + ganancia

Costo de casaca A → x

Costo de casaca B → y

Con la venta de A gana → $x + 20\ \%.x = 60$

$(100 + 20)\ \%.x = 60$

$\frac{120}{100}x = 60 \rightarrow x = 50$

Con la venta de B pierde → $y - 20\ \%.y = 60$

Reemplazamos

$(100 - 20)\ \%.y = 60$

$\frac{80}{100}\ y = 60 \rightarrow y = 75$

Costo total: 50 + 75 = 125

Venta total: 60 + 60 = 120

Por lo tanto, se observa que perdió S/ 5.

Respuesta C

Reto 4

Solución

Número de Inscritos→ x

Número de ausentes → 4 % de x

Número de desaprobados → 20 % de x

Número de ingresantes → 380

$x = 4\,\%x + 20\,\%x + 380$

Resolvemos y despejamos la x.

$$x = \frac{4}{100}x + \frac{20}{100}x + 380$$

$$x = \frac{x}{25} + \frac{x}{5} + 380$$

$$25x = 6x + 380(25)$$

$$19x = 380(25)$$

$x = 500$

Luego, el número total de postulantes fue 500.

Respuesta B

Reto 5

Solución 1

Área del triángulo → $A = \dfrac{b.h}{2}$

$$A_{Inicial} = \frac{60(50)}{2} = 1500$$

La base se incrementa en un 30 %.

$$60 + 30\ \%(60) = 60 + 18 = 78$$

La altura se incrementa en un 50 %.

$$50 + 50\ \%(50) = 50 + 25 = 75$$

Nueva área:

$A_{Final} = 78(75)/2$

$A_{Finall} = 2925$

Calculamos la variación porcentual aplicando la regla de tres.

$$1500 \to 100\ \%$$

$$2925 \to x$$

$$x = \frac{2925(100)}{1500} = \frac{2925}{15} = 195\ \%$$

La variación fue de 95 %.

Solución 2

Área del triángulo inicial → 100 %

Incremento de base → (100 + 30)% = 130 %

Incremento de la altura → (100 + 50)% = 150 %

Nueva área:

$A_{Final} = (130\ \%)(150\ \%)$

$$A_{Final} = \frac{130}{100}(150\ \%) = 195\ \%$$

Variación porcentual:

$$V = A_{Final} - A_{Inicial}$$

$$V = 195\ \% - 100\ \% = 95\ \%$$

Respuesta D

Reto 6

Solución

Área inicial del círculo → $A_{Inicial} = \pi r^2$ → 100%

Área final del círculo → $A_{Final} = \pi(kr)^2$ → 2500%

Establecemos la comparación y simplificamos.

$$\frac{\pi r^2}{\pi(kr)^2} = \frac{1000}{2500}$$

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{25} \rightarrow k = 5$$

El radio se tendrá que multiplicar por 5.

Respuesta A

Curiosidades

El 128 es un número especial que está muy relacionado con el número 7. El 7 es considerado como un número cabalístico y enigmático.

¿Cuál es esa relación?

Veamos:

El 128 puede ser descompuesto en siete factores iguales.

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7 = 128$

El 128 puede ser descompuesto en 4 sumandos: 7; 21; 2 y 98.

$7 + 21 + 12 + 98 = 128$

Estos cuatro números o sumandos tienen una propiedad que señala que, si al primero se le suma 7, al segundo se le disminuye en 7, al tercero se multiplica por 7 y al último se le divide entre 7, cada una de estas operaciones da el mismo resultado.

$7 + 7 = 14$; $21 - 7 = 14$; $2 \times 7 = 14$; $98 / 7 = 14$, y el 14 es múltiplo de 7.

¿Podrás descubrir otros números que tengan alguna propiedad similar?

PREPÁRATE

SESIÓN

11

Razonamiento Matemático

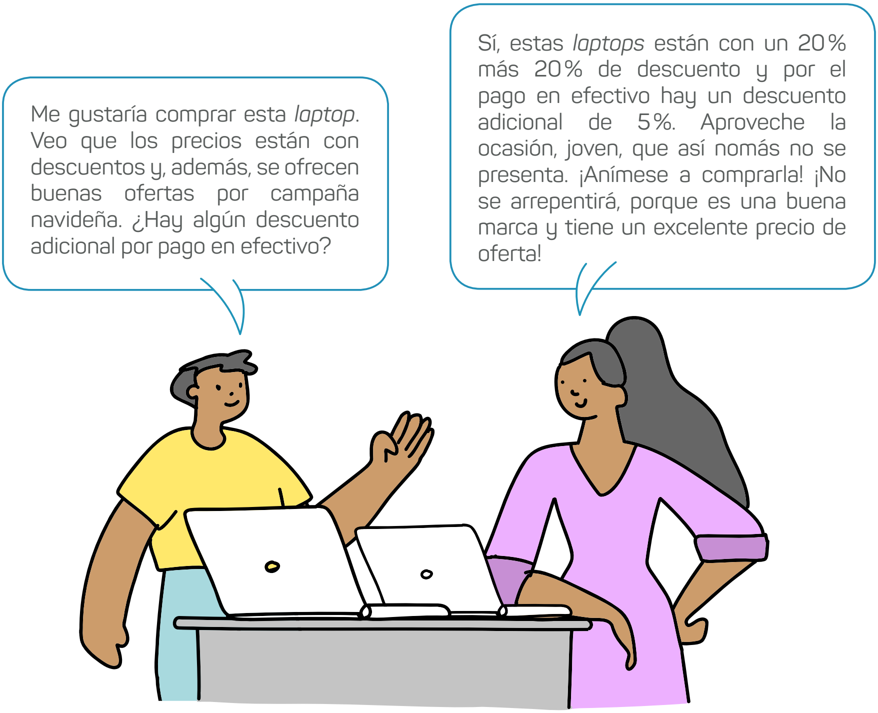
Porcentajes II

PRONABEC

PERÚ | Ministerio de Educación

Actividad: Resolvemos situaciones o problemas con el uso de los porcentajes

Porcentajes II



En el ámbito comercial muchas veces se hace uso de estrategias de *marketing* con la finalidad no solo de mantener la confianza y la permanencia de la clientela, sino también de atraer nuevos clientes potenciales, que son indispensables para el crecimiento y el fortalecimiento económico y laboral de las empresas. Una de las principales estrategias que utilizan las empresas para optimizar sus ingresos en forma constante y ampliar su cartera de clientes es aplicar descuentos y ofrecer ofertas increíbles en los precios de venta de sus productos.

Para ello, hacen uso de un amplio despliegue de publicidad con el objetivo de que las personas acudan a dichos establecimientos muy motivados.

Muchas veces observamos que nos ofrecen productos con doble o triple descuento y algunos otros con un solo descuento. Esto nos permite realizar cálculos y saber cuál es realmente el que más nos favorece. En esta sesión trataremos el tema de compra y venta con descuentos.

Recordamos los conceptos básicos

Aumentos sucesivos

Se denomina así al aumento porcentual sucesivo que presenta una cantidad determinada. Se halla el primer porcentaje y se suma a la cantidad inicial. Luego, se vuelve a sumar el otro porcentaje calculado sobre el nuevo monto, y así sucesivamente.

Descuentos sucesivos

Se denomina así a los descuentos porcentuales que se aplican a una cantidad determinada. Se halla el primer porcentaje y se resta este resultado de la cantidad inicial. Luego, se vuelve a restar el otro porcentaje calculado sobre el nuevo monto, y así sucesivamente.

Fórmula para el cálculo del aumento único (A_u)

$$A_u = \left[A_1 + A_2 + \frac{(A_1)(A_2)}{100} \right] \%$$

$A_1 \rightarrow$ Primer aumento

$A_2 \rightarrow$ Segundo aumento

Fórmula para el cálculo del descuento único (D_u)

$$D_u = \left[D_1 + D_2 + \frac{(D_1)(D_2)}{100} \right] \%$$

$D_1 \rightarrow$ Primer descuento

$D_2 \rightarrow$ Segundo descuento

Aplicaciones comerciales en los precios de ventas y costos

Precio de venta → P_v

Precio de costo → P_c

Ganancia o utilidad → G

Pérdida → P

Al realizar una venta, al precio de costo se le recarga una ganancia o utilidad.

$$P_v = P_c + G$$

Al realizar una venta a menor precio que el precio de costo, se origina una pérdida.

$$P_v = P_c - P$$

En ambos casos, la ganancia o pérdida están en función de un porcentaje.

Situaciones problemáticas

Situación problemática 1

Ernesto y su hermana visitaron tiendas de electrodomésticos pues quieren comprar una cocina para su mamá. Había muchas ofertas y encontraron una cocina con un descuento del 40 %, pero les dijeron que si realizaban una compra a través de la página web del establecimiento, tenían un descuento adicional del 10 %. Si el precio de la cocina era de S/ 1290, Ernesto piensa que si hace la compra por internet solo pagará la mitad del precio original, es decir, S/ 645. ¿Cuánto tendrá que pagar realmente por la cocina si la compra a través de la web?

A) S/ 744
B) S/ 696,60
C) S/ 696,40
D) S/ 593,40
E) S/ 645

Solución

Precio de la cocina → S/ 1290

Descuento por oferta → 40 % de S/ 1290

Calculamos el primer descuento.

$$D_1 = 40\ \%\ (1290)$$

$$D_1 = \frac{40}{100}\ (1290)$$

$$D_1 = 516$$

Nuevo precio → 1290 – 516 = 774

Descuento adicional → 10 % del nuevo precio que es S/ 774

$$D_2 = \frac{10}{100}\ (774) = 77{,}4$$

Luego, el descuento total será el siguiente:

$$D_t = D_1 + D_2$$

$$D_t = 516 + 77{,}4 = 593{,}40$$

Calculamos el precio final que se pagará por la cocina.

$$1290 - 593{,}40 = 696{,}60$$

Por lo tanto, se pagará S/ 696,60, porque no es lo mismo 50% de descuento que 40% + 10% de descuentos sucesivos.

Solución aplicando la fórmula de descuentos sucesivos:

$$D_u = \left[D_1 + D_2 - \frac{(D_1)(D_2)}{100} \right] \%$$

$$D_u = \left[40 + 10 - \frac{(40)(10)}{100} \right] \% = 46\ \%$$

Si el descuento fue del 46 %, entonces pagó el 54 %.

Calculamos el 54 % de 1290.

$$\text{Precio de oferta} = \frac{54}{100}(1290) = 696{,}60$$

Respuesta B

Situación problemática 2

Aurora es una estudiante que en sus tiempos libres se dedica a la venta de ciertos artículos de consumo masivo. Para vender sus productos, una distribuidora le ofreció dos descuentos sucesivos de 20 % y 20 %, y otra distribuidora del mismo rubro le ofreció 10 % y 30 % de descuentos sucesivos. Ella tiene que hacer un pedido por un total de S/ 1500. Por eso, hace cálculos y elige la distribuidora que le ofrece la mejor oferta. ¿Cuál fue el mayor ahorro que realizó Aurora al escoger una de las dos distribuidoras?

A) S/ 540
B) S/ 545
C) S/ 520
D) S/ 495
E) S/ 555

Solución

Calculamos el descuento único realizado por la primera distribuidora.

$$D_u = \left[D_1 + D_2 - \frac{(D_1)(D_2)}{100} \right] \%$$

$$D_u = \left[20 + 20 - \frac{(20)(20)}{100} \right] \% = 36\ \%$$

Luego, calculamos el 36% de S/1500.

$$D_1 = \frac{36}{100}(1500) = 540$$

Calculamos el descuento único realizado por la segunda distribuidora.

$$D_u = \left[10 + 30 - \frac{(10)(30)}{100} \right] \% = 37\%$$

Se observa que el descuento es mayor. Para verificar esto calculamos el 37 % de S/ 1500.

$$D_2 = \frac{37}{100}(1500) = 555$$

El mayor ahorro es de S/ 555.

Respuesta E

Situación problemática 3

José trabaja en una empresa distribuidora de material gráfico. Como es un buen trabajador que destaca por su desempeño laboral y su puntualidad, el gerente ha decidido darle un aumento de sueldo del 10 %. Además, como tiene varios años de servicio en la empresa, le dará un 5 % adicional. Si su sueldo es de S/ 1200 mensual, ¿cuánto cobrará José a fin de mes?

A) S/1218,6
B) S/1215,5
C) S/1396
D) S/1386
E) S/1440

Solución

Sueldo → S/1200

$A_1 \rightarrow 10\ \%$

$A_2 \rightarrow 5\ \%$

Calculamos el aumento único de ambos porcentajes con la siguiente fórmula:

$$A_u = \left[A_1 + A_2 + \frac{(A_1)(A_2)}{100} \right] \%$$

$$A_u = \left[10 + 5 + \frac{(10)(5)}{100} \right] \%$$

$$A_u = [15 + 0,5]\%$$

$$A_u = 15,5\ \%$$

Ahora calculamos el nuevo sueldo.

Nuevo Sueldo = 1200 + 15,5 %(1200)

$$\text{Nuevo Sueldo} = 1200 + \frac{15,5}{100}(1200)$$

Nuevo Sueldo = 1200 + 186 = 1386

José cobrará a fin de mes la cantidad de S/ 1386.

Respuesta D

Situación problemática 4

El precio de una calculadora científica es de $ 50. Si al venderla Andrés gana el 5 % del precio de costo más el 25 % del precio de venta, ¿a qué precio vendió Andrés la calculadora?

A) $ 52,5
B) $ 59
C) $ 70
D) $ 72,5
E) $ 60

Solución

Precio de costo → P_c = $ 50

Precio de venta → $P_v = P_c + G$

Reemplazamos datos.

$$P_v = P_c + G$$

$$P_v = P_c + 5\%(P_c) + 25\ \%(P_v)$$

Reemplazamos el precio de costo.

$P_v = 50 + 5\ \%(50) + 25\ \%(P_v)$

$P_v - 25\ \%(P_v) = 50 + 2{,}5$

$75\ \%(P_v) = 52{,}5$

$0{,}75(P_v) = 52{,}5$

$P_v = 52{,}5/0{,}75$

$P_v = 70$

Luego, Andrés vendió la calculadora en $ 70.

Respuesta C

Retos

Los retos son los desafíos que te impulsarán a desarrollar tus propias estrategias y permitirán verificar tus logros de aprendizaje. Para ello, tendrás que leer bien la situación (problema o ejercicio), comprenderla, analizar los datos, trazar un plan de acción y realizar las operaciones para comprobar luego el resultado. ¡Éxitos en tu proceso de aprendizaje!

Reto 1

Marcelo tiene un negocio de venta de bicicletas. La semana pasada vendió 2 bicicletas a S/ 360 cada una. En la primera venta ganó el 25 % y en la segunda venta perdió el 25 % del costo. ¿Cuánto ganó o perdió en estas ventas?

A) No gana ni pierde.
B) Pierde S /48.
C) Gana S/ 48.
D) Pierde S/ 60.
E) Gana S/ 58.

Reto 2

Un comerciante de abarrotes vendió un producto y ganó el 20 % del costo. Con el importe de la venta, compró otro producto, el cual vendió y ganó el 30 % del precio de venta. ¿Qué relación habrá entre los precios de venta de ambos productos?

A) 3/5
B) 7/10
C) 7/12
D) 3/4
E) 8/11

Reto 3

Mariano compra una docena de pantalones *jeans* con descuentos sucesivos del 32 % y el 24 %, y paga por dicha docena S/ 323. ¿Cuál fue el precio original de la docena de pantalones bluyín?

A) S/ 625
B) S/ 496
C) S/ 566
D) S/ 656
E) S/ 525

Reto 4

Un agricultor vende sus productos y gana el 10 %. Luego, el mayorista los compra y gana el 20 %. Después, el minorista compra dichos productos al mayorista y gana el 30 %. Si el consumidor final adquiere el producto a S/ 85, determinar el precio original del producto.

A) S/ 45
B) S/ 34,80
C) S/ 50
D) S/ 51,50
E) S/ 61

Reto 5

En una empresa hay 40 trabajadores, de los cuales el 25 % son mujeres. ¿Cuántas mujeres más se deben contratar para que dicho número sea el 40 %?

A) 6
B) 15
C) 16
D) 10
E) 20

Reto 6

Se compró una vaca Holstein que luego se vendió por S/ 4800 y se obtuvo una ganancia igual al 25 % del precio de compra, más el 5 % del precio de venta. ¿Cuál fue el costo de la vaca?

A) S/ 3468
B) S/ 4032
C) S/ 3840
D) S/ 4080
E) S/ 3648

Resolvemos los retos

Reto 1

Precio de la bicicleta → S/ 360

Primera venta:

$$P_v = P_c + G$$

$$360 = P_c + 25\,\%\,(P_c)$$

$$360 = 125\,\%\,(P_c)$$

$$360 = \frac{125}{100}\,(P_c)$$

$$360 = \frac{5}{4}\,(P_c)$$

$$\frac{360(4)}{5} = P_c$$

$$288 = P_c$$

Segunda venta:

$$P_v = P_c - P$$

$$360 = P_c - 25\,\%\,(P_c)$$

$$360 = 75\,\%\,(P_c)$$

$$360 = \frac{75}{100}\,(P_c)$$

$$360 = \frac{3}{4}\,(P_c)$$

$$\frac{360(4)}{3} = P_c$$

$$480 = P_c$$

Calculamos el precio total de costos de ambas bicicletas.

288 + 480 = 768

Si vendió las dos bicicletas por un total de S/ 720, calculamos la diferencia.

768 – 720 = 48

Luego, perdió 48 soles.

Respuesta B

Reto 2

Precio de primera venta:

$P_{v1} = P_c + 20\ \%(P_c)$

$P_{v1} = 120\ \%\ (P_c)$

Precio de segunda venta:

$P_{v2} = P_{v1} + 30\ \%\ (P_{v2})$

$P_{v2} - 30\ \%\ (P_{v2}) = P_{v1}$

$70\ \%(P_{v2}) = P_{v1}$

Establecemos la relación entre ambos precios de venta.

$\frac{70}{100}\ (P_{v2}) = P_{v1}$

$7\ (P_{v2}) = 10\ P_{v1}$

$7/10 = P_{v1} / P_{v2}$

La razón entre ambas ventas es de 7/10.

Respuesta B

Reto 3

Precio original de una docena de bluyines → x

Precio con descuentos sucesivos → S/ 323

Descuentos del 32 % y el 24 %

Calculamos a cuánto ascienden los descuentos sucesivos.

$$D_u = \left[32 + 24 - \frac{(32)(24)}{100} \right] \% = 48{,}32\ \%$$

Pago total realizado: 100 % – 48,32 % = 51,68 %

Realizamos la comparación y aplicamos la regla de tres.

323 → 51,68 %

x → 100 %

Despejamos x.

$x = 323(100)/\ 51{,}68 = 625$

Por lo tanto, la docena de pantalones costó S/ 625.

Respuesta A

Reto 4

Precio de costo → x

Precio de venta del productor:

$x + 10\ \%(x) = 110\ \%(x)$

Precio de venta del mayorista:

110 %(x) + 20 %[110 %(x)] = 120 %[110 %(x)]

Precio de venta del minorista:

120 %[110 % (x)] + 30 % (120 %)[110 % (x)]= 130 %(120 %)[110 %(x)]

Pago del consumidor al minorista:

130 %(120 %)[110 % (x)] = 85,80

Calculamos el valor de x que es el precio de costo del productor.

$$\left(\frac{130}{100}\right)\left(\frac{120}{100}\right)\left(\frac{110}{100}\right) x = 85{,}80$$

Simplificamos y despejamos.

$(13)(12)(11)x = 85{,}80\ (1000)$

$1716x = 85800$

$x = 50$

Por lo tanto, el precio del costo original del producto es de 50 soles.

Respuesta C

Reto 5

Solución

Total de trabajadores → 40

Número de mujeres → 25 % de 40

Número de mujeres = 10

Número de mujeres que se contratará → x

$10 + x = 40\ \%\ (40+x)$

Resolvemos la ecuación y despejamos la variable.

$$10 + x = \frac{40}{100}\ (40 + x)$$

$5(10 + x) = 2(40 + x)$

$50 + 5x = 80 + 2x$

$3x = 30$

$x = 10$

Por lo tanto, en la empresa, se deberá contratar a 10 mujeres más para llegar al 40 %.

Respuesta D

Reto 6

Solución

Precio de costo de la vaca → P_c

Precio de venta de la vaca → P_v = S/ 4800

Ganancia → G

$G = 25\ \%(P_c) + 5\ \%(P_v)$

Sabemos:

$P_v = P_c + G$

Reemplazamos los datos.

$4800 = P_c + 25\ \%(P_c) + 5\ \%(4800)$

$4800 = P_c + 0{,}25(P_c) + 0{,}05(4800)$

$4800 - 0{,}05(4800) = 1{,}25(P_c)$

$4800 - 240 = 1{,}25(P_c)$

$3648 = P_c$

Luego, el precio de costo de la vaca fue S/ 3648.

Respuesta E

Curiosidades

El número 142 857 se incluye dentro de los números cabalísticos de la matemática. Es un número que presenta, en relación con sus múltiplos, coincidencias verdaderamente interesantes.

Si lo multiplicamos por 2, el producto será **14**2 857 x 2 = 285 7**14**.

Notamos que las cifras que constituyen el producto son las mismas del número dado, pero en otro orden.

Si lo multiplicamos por 3, el producto será **14**2 857 x 3 = **4**28 57**1**.

Observamos la misma singularidad.

Lo mismo ocurre al multiplicarlo por 4; por 5 y por 6, pero cuando se multiplica por 7 sucede algo increíble.

142857 x 7 = 999 999

¿Qué pasará si lo multiplicas por 8; 9? ¿Sucederá lo mismo? Y si lo multiplicas por 11; 12 y demás números, ¿cuál será la particularidad en cada caso? Te reto a que lo investigues.

PREPÁRATE

SESIÓN

12

Razonamiento Matemático

Porcentajes III

PRONABEC

PERÚ Ministerio de Educación

Actividad: Resolvemos situaciones o retos que involucren aplicaciones de los porcentajes en situaciones comerciales y mezclas

Porcentajes III

Todavía se hace un poco difícil entender y aplicar los conceptos de precio de venta, precio de costo, precio de lista, descuentos y, sobre todo, el de porcentajes en este tipo de problemas. Pero vemos que no solo en este tipo de transacciones comerciales se emplean los porcentajes, sino también cuando se habla de porcentajes de mezclas.

Sí, te pongo un ejemplo. Raúl va a emprender un nuevo negocio de venta de café y para ello va a mezclar dos tipos de café. Uno es el café de exportación y el otro es conocido como "café superior". El nuevo café lo venderá a un precio promedio. Para calcular la ganancia, tomará en cuenta las cantidades de ambos tipos de café que utilizará en la mezcla, así como sus precios.

La aplicación de los porcentajes en la vida cotidiana se amplía debido a que se pueden utilizar no solo en el ámbito comercial, sino también en los procesos de mezclas y aleaciones, y en otros contextos como los reportes estadísticos sobre diversas situaciones.

Muchas veces observamos que en una mezcla se utilizan sustancias en un determinado porcentaje de pureza, como el alcohol o algunos combustibles, en los cuales el grado de concentración es equivalente al porcentaje. En esta sesión trataremos el uso de los porcentajes en acciones de compra-venta y en algunos casos de mezclas.

Recordamos los conceptos básicos

Aplicaciones comerciales de los porcentajes

La ganancia o pérdida se expresa como porcentaje del precio de costo (P_C).
La rebaja o descuento se expresa como porcentaje del precio de lista (P_L) o precio fijado (P_F).

Denominaciones comerciales

Precio de venta → P_v
Precio de costo → P_c
Ganancia o utilidad → G
Descuento → D
Pérdida → P
Precio de lista → P_L
Precio fijado → P_F

Conocemos las fórmulas de precio de venta:

$$P_v = P_c + G$$
$$P_v = P_c - P$$

Hay otras fórmulas de precio de lista o precio fijado:

$$P_L = P_c + G + D$$
$$P_F = P_L$$

Nota:

Para vender un producto, el comerciante debe tener en cuenta el precio de costo, la ganancia, el descuento y el precio final o de lista.

El cliente o consumidor solo tiene en cuenta el precio de costo y el precio de lista o precio fijado.

Mezcla

Es la reunión de dos o más sustancias (ingredientes) en cantidades arbitrarias, en la cual cada una de ellas conserva su propia naturaleza.

Regla de mezclas

Es la regla que permite hallar el precio promedio de la mezcla (*o peso promedio, grados promedio, etc.*), una vez conocidas las cantidades y los precios de cada uno de los ingredientes que la componen.

Dadas las cantidades $C_1; C_2; C_3; \ldots$ y dados los precios $P_1; P_2; P_3; \ldots$

Para calcular el precio promedio utilizamos la siguiente fórmula:

$$P_P = \frac{C_1P_1 + C_2P_2 + C_3P_3 + \ldots + C_nP_n}{C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_n}$$

Mezcla alcohólica

Es aquella en la que intervienen alcohol puro y agua.

Para calcular el precio promedio utilizamos la siguiente fórmula:

$$\text{Grado de la mezcla} = \left(\frac{\textit{Volumen del alcohol puro}}{\textit{Volumen total}}\right) 100°$$

Situaciones problemáticas

Situación problemática 1

Verónica se dedica a la comercialización de ventiladores. Ha comprado un lote de una docena de ventiladores a S/ 160 cada uno. ¿Cuál sería el precio de venta del ventilador, de tal manera que al hacer un descuento del 20 % aún pueda ganar el 25 % del precio de costo?

A) S/ 200
B) S/ 220
C) S/ 250
D) S/ 185
E) S/ 195

Solución

Precio de costo del ventilador → S/ 160

Descuento del precio de lista → 20 % del P_L

Ganancia → 25 % del P_C

Consideramos el precio de lista:

$$P_L = P_C + G + D$$

Reemplazamos en la ecuación los datos.

$$P_L = 160 + 25\ \% \ (P_C) + 20\ \% \ (P_F)$$

Pero el precio de lista es igual al precio fijado.

$$P_L = 160 + 25\ \% \ (P_C) + 20\ \% \ (P_L)$$

$$P_L - 20\% \ (P_L) = 160 + 25\ \% \ (160)$$

$$80\% \ (P_L) = 160 + 25\ \% \ (160)$$

$$\frac{80}{100}(P_L) = 160 + \frac{25}{100}(160)$$

Simplificamos las fracciones.

$$\frac{4}{5}(P_L) = 160 + \frac{1}{4}(160)$$

Despejamos P_L.

$$4(P_L) = (160 + 40)(5)$$

$$4(P_L) = 1000$$

$$P_L = 250$$

Debe fijarse como precio de lista o precio fijado S/ 250.

Respuesta C

Situación problemática 2

¿Cuál será el precio de venta de un smart TV (televisor inteligente), de modo tal que al venderlo se haga una rebaja del 25 % y todavía se gane el 40 % si se sabe que el precio de costo es S/ 1500?

A) S/ 3000
B) S/ 5000
C) S/ 2800
D) S/ 2900
E) S/ 2700

Solución

Precio de costo → S/ 1500

Descuento → 25 % del precio fijado

Ganancia → 40 % del precio de costo

Aplicamos la ecuación.

$P_L = P_c + G + D$

$P_L = 1500 + 40\ \% \ (1500) + 25\ \% \ (P_L)$

$P_L - 25\ \% \ (P_L) = 1500 + 0{,}4\ (1500)$

$75\ \% \ (P_L) = 1500 + 600$

$0{,}75\ (P_L) = 2100$

$P_L = 2100/0{,}75$

$P_L = 2800$

El televisor se deberá vender a S/ 2800.

Respuesta C

Situación problemática 3

Marcelo compró un carro a \$ 16 500. Después de un tiempo decide venderlo ganando el 20 % del precio de costo. El que compró el carro le pide un descuento del 20 % del precio de venta, a lo cual Marcelo accede. ¿A qué precio fue vendido el carro?

A) \$ 15 840
B) \$ 19 800
C) \$ 23 760
D) \$ 20 460
E) \$ 12 540

Solución:

Costo del carro → \$ 16 500

Ganancia → 20 % del P_c

Descuento → 20 % del P_v

Planteamos la ecuación.

$P_v = P_c + 20\ \%\ (P_c)$

$P_v = 120\ \%\ (P_c)$

$P_F = P_v - 20\ \%\ (P_v)$

$P_F = 120\ \%\ (P_c) - 20\ \%\ (120\ \%(P_c))$

Reemplazamos el precio de costo.

$P_F = 120\ \%\ (16\ 500) - 20\ \%\ (120\ \%\ (16\ 500))$

$P_F = 1{,}20\ (16\ 500) - (0{,}2)(1{,}2)(16\ 500)$

$P_F = 19\ 800 - 3960$

$P_F = 15\ 840$

Marcelo vendió el carro a $ 15 840.

Respuesta A

Situación problemática 4

A 144 litros de alcohol al 75 % de pureza, se le agrega 72 litros de agua pura. ¿Qué cantidad de alcohol puro (en litros) debe agregarse a esta nueva mezcla para obtener la **concentración** inicial?

A) 216 L
B) 220 L
C) 218 L
D) 180 L
E) 240 L

Solución:

Total de litros de la mezcla → 144 L

Pureza del alcohol → 75 %

Cantidad de agua → 72 L

Utilizamos un cuadro para colocar los datos.

Mezcla	Mezcla 1	Mezcla 2	Grado de concentración
Agua	25 % (144) = 36 L	36 + 72 = 108	25 %
Alcohol	75 % (144) = 108 L	108 + x	75 %
Total	144 L	108 + 108 + x	100 %

Comparamos.

$$\frac{108}{25\ \%} = \frac{108 + x}{75\ \%}$$

Resolvemos.

$$108\ (75\ \%) = 25\ \%\ (108 + x)$$

$$108\ (0{,}75) = 0{,}25\ (108 + x)$$

$$81 = 27 + 0{,}25x$$

$$81 - 27 = 0{,}25x$$

Despejamos la variable.

$$216 = x$$

Se debe agregar 216 L de alcohol para obtener una mezcla con el mismo grado de concentración.

Respuesta A

Retos

Los retos son los desafíos que te impulsarán a desarrollar tus propias estrategias y permitirán verificar tus logros de aprendizaje. Para ello, tendrás que leer bien la situación (problema o ejercicio), comprenderla, analizar los datos, trazar un plan de acción y realizar las operaciones para comprobar luego el resultado. ¡Éxitos en tu proceso de aprendizaje!

Reto 1

Javier se dedica a la compra y venta de zapatillas. Para fijar el precio de venta de un par de zapatillas, aumentó su costo en S/ 30. Pero en el momento de realizar la venta hizo una rebaja de S/ 10, con lo que ganó el 10 % del precio de costo. ¿Cuál es el precio de venta del par de zapatillas?

A) S/ 200
B) S/ 250
C) S/ 230
D) S/ 220
E) S/ 240

Reto 2

¿Cuánto dinero tengo si gastando el 30 % de dicho monto y ganando el 25 % de lo que me quedaría, estaría perdiendo S/ 180?

A) S/ 1440
B) S/ 1360
C) S/ 1432
D) S/ 1784
E) S/ 1872

Reto 3

Julia compró una bicicleta para su hermanita en una campaña navideña con un descuento del 20 %. ¿Cuál fue el precio de lista de la bicicleta si pagó por ella S/ 360?

A) S/ 400
B) S/ 480
C) S/ 395
D) S/ 410
E) S/ 450

Reto 4

Margarita mezcla 40 litros de alcohol, cuyo costo por litro fue de S/ 25, con 20 litros de alcohol, cuyo costo por litro tuvo otro precio, y obtiene un nuevo alcohol con un costo de S/ 23 el litro. ¿Cuál es el precio del segundo tipo de alcohol?

A) S/ 18
B) S/ 19
C) S/ 21
D) S/ 24
E) S/ 15

Reto 5

¿Cuántos litros de leche de calidad A y de calidad B se mezclan en un total de 60 litros, cuyo precio es de S/ 6 el litro, si la leche de calidad A tiene un precio de S/ 4 el litro y la leche de calidad B cuesta S/ 8 el litro?

A) 70 L y 10 L
B) 25 L y 45 L
C) 30 L y 30 L
D) 10 L y 50 L
E) 20 L y 40 L

Reto 6

El 10 % del peso del agua de mar es sal. ¿Cuántos litros de agua dulce se deben añadir a 100 litros de agua de mar para que la concentración de sal sea al 4 %?

A) 140 L
B) 100 L
C) 140 L
D) 150 L
E) 120 L

Resolvemos los retos

Reto 1

Precio de venta → P_v

Aumento → S/ 30

Descuento → S/ 10

Ganancia → 10 % de P_c

Calculamos el precio de costo teniendo en cuenta lo siguiente:

Aumento = Ganancia + Descuento

$30 = 10\ \%\ (P_c) + 10$

$20 = 10\ \%\ (P_c)$

$20 = 0{,}1\ P_c$

$200 = P_c$

Calculamos el precio de venta.

$P_V = P_c + 10\ \%\ (P_c)$

$P_V = 200 + 10\ \%\ (200)$

$P_V = 200 + 20 = 220$

Luego, cada par de zapatillas se vende en S/ 220.

Respuesta D

Reto 2

Dinero que tengo → x

Dinero que gasto → 30 % de x

Dinero que gano → 25 % (x – 30 % x)

Dinero que pierdo → S/ 180

Por lo tanto, se puede afirmar lo siguiente:

Dinero que gasto – Dinero que gano = S/ 180

Reemplazamos los datos.

$30\ \%\ (x) - 25\ \%\ (x - 30\ \%\ (x)) = 180$

$0{,}3(x) - 0{,}25(70\ \%(x)) = 180$

$0{,}3(x) - 0{,}25\ (0{,}7x) = 180$

$0{,}3\ (x) - 0{,}175\ (x) = 180$

$0{,}125x = 180$

$x = 180/0{,}125$

$x = 1440$

El total de dinero que tengo es S/ 1440.

Respuesta A

Reto 3

Precio de lista de la bicicleta → P_L

Precio de venta → S/ 360

Descuentos → 20 % del P_L

$P_L = P_V + D$

$P_L = 360 + 20\,\%\,(P_L)$

$P_L - 20\,\%\,(P_L) = 360$

$80\,\%\,(P_L) = 360$

$0{,}8(P_L) = 360$

$P_L = 360/0{,}8$

$P_L = 450$

Por lo tanto, el precio de lista de la bicicleta era de S/ 450 soles.

Respuesta E

Reto 4

Precio del alcohol tipo B → x

Elaboramos un cuadro de doble entrada para colocar los datos:

	Alcohol A	Alcohol B	Mezcla
Litros	40	20	60
Precios	S/25	x	S/23
Total	40(25)	20(x)	60(23)

Planteamos la ecuación.

$40(25) + 20(x) = 60(23)$

$1000 + 20(x) = 1380$

Despejamos la variable.

$20(x) = 1380 - 1000$

$x = 19$

Por lo tanto, el precio del segundo tipo de alcohol es S/ 19.

Respuesta B

Reto 5

Litros de leche de calidad A → x

Litros de leche de calidad B → $60 - x$

Elaboramos un cuadro para colocar los datos:

	Leche Calidad A	Leche Calidad B	Mezcla
Litros	x	$60 - x$	60
Precios	S/4	S/8	S/6
Total	$4(x)$	$8(60 - x)$	$6(60)$

Planteamos la ecuación.

$4(x) + 8(60 - x) = 6(60)$

$4(x) + 480 - 8(x) = 360$

$480 - 360 = 4x$

$120 = 4x$

$30 = x$

Por lo tanto, se mezclan 30 litros de leche de cada calidad.

Respuesta C

Reto 6

Cantidad de litros de agua dulce que se tiene que agregar → x

10 % del peso es sal → 10 % (100) = 10 litros

Cantidad de agua → 100 - 10 = 90 litros

Nueva concentración de sal → 4 % del total

Cantidad de agua → $90 + x$

Establecemos la proporción de las mezclas.

$$\frac{4\ \%}{10} = \frac{96\ \%}{90 + x}$$

Resolvemos.

$4\ \% (90 + x) = 10\ (96\ \%)$

$360 + 4x = 960$

$4x = 960 - 360$

$x = 600/4$

$x = 150$

Luego, se tendría que agregar 150 litros de agua dulce.

Respuesta D

Curiosidades:

El número 12 345 679 está formado por la sucesión de las cifras significativas, excepto el 8. Este es un número muy especial, porque si se multiplica por un múltiplo de 9 diferente de cero, se obtienen los siguientes resultados:

12 345 679 x 9 = 111 111 111
12 345 679 x 18 = 222 222 222
12 345 679 x 27 = 333 333 333

¿Se cumplirá esta propiedad para todos los múltiplos de 9? ¿Por qué crees que sucede esto?

Verifica y establece tus propias conclusiones.

PREPÁRATE

SESIÓN
13

Razonamiento Matemático

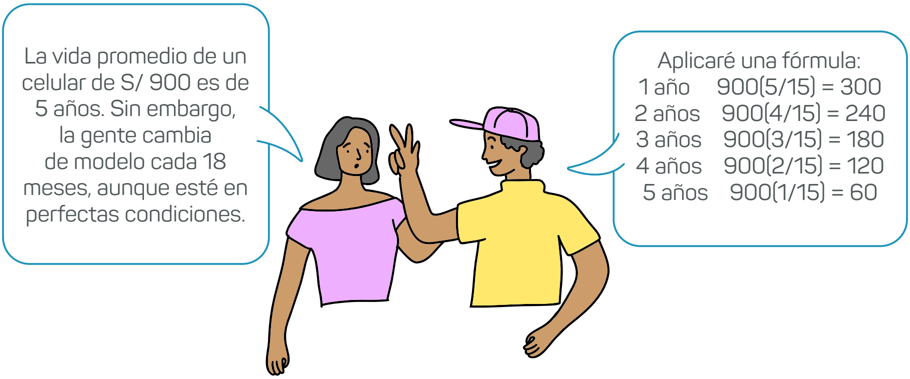
Progresiones aritméticas y geométricas

PRONABEC

PERÚ Ministerio de Educación

Actividad: Aplicamos nuestros conocimientos de progresión aritmética y geométrica en la vida cotidiana

Progresiones aritméticas y geométricas



Recordamos conceptos básicos

Progresión aritmética

En líneas generales, se denomina progresión aritmética a aquella sucesión de números en la que cada término se obtiene sumando una misma cantidad al término anterior.

Sin embargo, según una definición más precisa, se denomina progresión aritmética a una sucesión cuya característica es que, a cada número, menos al primero, se le suma o se le resta una cantidad constante que se denomina "diferencia común", la que se representa con "d".

Ejemplo

5; 12; 19; 26; 33; ... Es una progresión aritmética, cuya diferencia común es 7, y es creciente.

2; -8; -18: -28; -38; ... Es una progresión aritmética, cuya diferencia común es –10, y es decreciente.

Término general de una progresión aritmética: $a_1; a_2; a_3; a_4; \ldots a_n$

$a_1 = a_1$

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_1 + 2d$

$a_4 = a_1 + 3d$

.

.

.

$a_n = a_1 + (n - 1)d$

Pueden ser finitas o infinitas.

Fórmulas para hallar el término n-ésimo de una progresión aritmética.

$a_n = a_1 + (n-1)d$

Para calcular la suma de los n términos de una progresión aritmética.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)(n)}{2}$$

$$S_n = a_1 n + \frac{d(n-1)(n)}{2}$$

Progresión geométrica

Se denomina progresión geométrica a una sucesión de números en la que el cociente (o razón) entre dos términos consecutivos es siempre igual.

Por lo tanto, cada término se obtiene multiplicando por una misma cantidad (la razón) al término anterior.

Un ejemplo de progresiones lo podemos ver en una competición de tenis. Ahí siempre hay un participante que gana a otro en la competencia final. Para llegar a la final se ha realizado previamente una semifinal, en la cual participaron 4 jugadores. Pero en la etapa anterior compitieron 8 tenistas, y así sucesivamente, ya que en cada etapa de la competición siempre clasifica la mitad de los jugadores para la siguiente ronda. En conclusión, el número de jugadores en cada etapa siempre será la mitad del total de participantes de la etapa anterior, pues en cada partido se elimina a uno de los dos jugadores.

Es decir, tenemos una progresión geométrica de razón 1/2.

Se denomina progresión geométrica a una sucesión cuya característica es que cada uno de sus términos, menos el primero, se obtiene multiplicando o dividiendo por una cantidad constante llamada razón geométrica.

Ejemplo

4; 16; 64; 256; ... Es una progresión geométrica cuya razón es 4, y es creciente.

2; 2/5; 2/25; 2/125; 2/625; ... Es una progresión geométrica cuya razón es 1/5, y es decreciente.

Término general de una progresión geométrica: $a_1; a_2; a_3; a_4; \ldots a_n$

Donde

$a_1 = a_1$

$a_2 = a_1.r$

$a_3 = a_1.r^2$

$a_4 = a_1.r^3$

$a_n = a_1.r^{n-1}$

Fórmula para calcular el término n-ésimo y la suma de los términos de una progresión geométrica.

$a_n = (a_1)(r^{n-1})$

Fórmulas para calcular la suma de los n términos de una progresión geométrica.

$$S_n = \frac{(a_n)(r - a_1)}{r - 1}$$

$$S_n = \frac{(a_1)(r^n - 1)}{r - 1}$$

En el caso de que la razón sea un número comprendido entre 1 y −1 la fórmula se reduce a la siguiente:

$$S_\infty = \frac{a_1}{r - 1}$$

Situaciones problemáticas

Situación problemática 1

En noviembre de 2021 me compraré una bicicleta, por eso estoy ahorrando. En enero de 2020 comencé ahorrando S/ 50 y, desde entonces, cada semana ahorro S/ 10. ¿Cuánto dinero habré ahorrado hasta noviembre de 2021?

A) 1000
B) 1010
C) 1020
D) 1030
E) 1050

Solución

Es fácil calcularlo. Para ello, podemos aplicar progresiones.

Si se empieza ahorrando S/ 50 y cada semana se ahorra S/ 10, entonces tendríamos la siguiente operacionalización. Observa la tabla.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_n
50	50 + 10 = 60	50 + 2(10) = 70	50 + 3(10) = 80	50 + 4(10) = 90	$50 + (n - 1)(10)$
Simbolizando	$a_1 + d$	$a_1 + 2d$	$a_1 + 3d$	$a_1 + 4d$	$a_1 + (n - 1)d$

Ahora, veamos cuántas semanas han pasado desde enero del año pasado hasta noviembre de este año.

En el año hay un total de 52 semanas, pero hasta noviembre solo hay 46 semanas; por lo tanto, serán 98 semanas.

Entonces, calculamos el total de dinero.

$$50 + (98 - 1)(10) = 50 + 97(10) = 50 + 970 = 1020$$

Respuesta C

Situación problemática 2

Un día mi prima me mandó un mensaje en el que me contó que tenía que hacer un trabajo decorativo con cintas. Para realizarlo, ella tenía que cortar las cintas en pedazos de tal manera que entre estos se observe una relación decreciente de la mitad de longitud de la medida anterior. Me pidió que la ayudara a hacer los cortes, pero tomando en cuenta que el primer pedazo debía medir 80 cm y el último debía tener 2,5 cm. ¿Cuántos metros tendría que comprar para hacer dicho trabajo?

A) 1,50 m

B) 1,20 m

C) 2,40 m

D) 1,60 m

E) 1,80 m

Solución

Analicemos.

a_1 = 80 cm (la mitad de 80 es 40)

a_2 = 40 cm (la mitad de 40 es 20)

a_3 = 20 cm (la mitad de 20 es 10)

Formamos la sucesión 80; 40; 20; 10; 5; 2,5. Esta es una progresión geométrica cuya razón es 1/2, porque el término siguiente se halla multiplicando el término anterior por la razón, y así sucesivamente.

Si queremos hallar el total, debemos sumar lo siguiente:

$$80 + 40 + 20 + 10 + 5 + 2{,}5 = 157{,}5 \text{ cm}$$

Es decir, 1,575 m que equivale, aproximadamente, a 1,60 m

Respuesta D

Situación problemática 3

Hay una famosa anécdota de Gauss, quien fue un físico, matemático y astrónomo alemán a quien se le conoció como el Príncipe de las Matemáticas. Se sabe que cuando Gauss tenía diez años, aproximadamente, asistió a su primera clase de aritmética y el profesor les dio a los estudiantes un reto: hallar la suma de todos los números naturales del 1 al 100. El profesor creía que se iban a demorar en hacer los cálculos. Sin embargo, Gauss, a causa de su gran inteligencia, dio la respuesta a los pocos minutos. ¿Cuál fue la respuesta?

A) 5050

B) 4040

C) 3030

D) 2020

E) 1010

Solución

Los números naturales son 1, 2, 3, 4, ... 98, 99, 100.

Gauss sumó los extremos equidistantes.

$1 + 100 = 101; 2 + 99 = 101$

Así, observó que todos daban 101.

Entonces, multiplicó 50(101) = 5050.

Respuesta A

Situación problemática 4

A ver si nuestros amigos que nos están leyendo pueden decirnos el número que sigue en cada secuencia de números y cómo lo han calculado.

2; 8; 14; 20; 26; 32; ...

1; 3; 9; 27; 81; 243; ...

−5; −5/2; −5/4; −5/8; ...

A) primera = 38, segunda = 729, tercera = −5/32

B) primera = 40, segunda = 739, tercera = −5/64

C) primera = 42, segunda = 749, tercera = −5/128

D) primera = 44, segunda = 759, tercera = −5/256

E) primera = 46, segunda = 769, tercera = −5/512

Solución

Analizamos la primera.

$$\underbrace{2;\ 8}_{+6};\ \underbrace{\ }_{+6}14;\ \underbrace{\ }_{+6}20;\ \underbrace{\ }_{+6}26;\ \underbrace{\ }_{+6}32;\ \underbrace{\ }_{+6}38\ \ldots$$

La diferencia es constante: $d = 6$.

Es una progresión aritmética creciente.

Analizamos la segunda:

$$\underbrace{1;\ 3}_{\times 3};\ \underbrace{\ }_{\times 3}9;\ \underbrace{\ }_{\times 3}27;\ \underbrace{\ }_{\times 3}81;\ \underbrace{\ }_{\times 3}243;\ \underbrace{\ }_{\times 3}729\ \ldots$$

La diferencia es constante: $d = 3$.

Es una progresión geométrica creciente.

Analizamos la tercera:

$$\underbrace{-5;\ -5/2}_{\times 1/2};\ \underbrace{\ }_{\times 1/2}-5/4;\ \underbrace{\ }_{\times 1/2}-5/8;\ \underbrace{\ }_{\times 1/2}-5/16;\ \underbrace{\ }_{\times 1/2}-5/32\ \ldots$$

La diferencia es constante: $d = ½$.

Es una progresión geométrica decreciente.

Respuesta A

Situación problemática 5

Halla la suma de todos los múltiplos de 3 que están entre 19 y 200.

A) 1920

B) 2050

C) 3080

D) 5090

E) 6570

Solución

Determinamos si los múltiplos forman una progresión aritmética o una progresión geométrica.

Los múltiplos de 3 van de 3 en 3, es decir, sumándose un número constante; por lo tanto, es una progresión aritmética.

El primer múltiplo de 3 después de 19 es 21, y el último que está antes de 200 es 198.

$$\underbrace{21;\ 24}_{+3};\ \underbrace{\ }_{+3}27;\ \underbrace{\ }_{+3}\ldots 198$$ se forma sumando.

Entonces, la diferencia es +3.

Sin embargo, como no sabemos la cantidad de múltiplos, aplicamos la fórmula del término n-ésimo: $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

Reemplazamos.

$$198 = 21 + (n - 1)(3)$$

Resolvemos.

$$198 = 21 + 3n - 3$$

$$198 = 18 + 3n$$

Transponemos términos.

$$198 - 18 = 3n$$

Despejamos n.

$$n = 60$$

Aplicamos la fórmula de la suma de los términos de una progresión aritmética:

$$S = (a_1 + a_n)n/2.$$

Reemplazamos los valores.

$$S = (21 + 198)(60/2) = 219(30) = 6570$$

Respuesta E

Situación problemática 6

Las edades de tres personas están en progresión geométrica, cuya razón es 3. Si se sabe que el cuádruple de la suma de las edades de los menores excede en 28 años a la edad del mayor, calcula la edad de las tres personas.

A) 4; 12 y 36
B) 4; 7 y 13
C) 4; 12 y 78
D) 4; 18 y 24
E) 4; 12 y 24

Solución

Edades: $a_1 = a_1$

$a_2 = a_1.r$

$a_3 = a_1.r^2$

Planteamos la ecuación.

$4(a_1 + a_1.3) - 28 = a_1.9$

$4(4a_1) - 28 = 9a_1$

$16a_1 - 9a_1 = 28$

$7a_1 = 28$

$a_1 = 4$

Las edades son 4; 12 y 36.

Respuesta A

Situación problemática 7

¿Qué profundidad tiene un tanque de cemento si por cada metro de construcción se paga S/ 500 y por cada uno de los metros restantes, S/ 25 más que el anterior? Para responder a la pregunta toma en cuenta que en total se pagó S/ 3375.

A) 45 m

B) 6 m

C) 18 m

D) 9 m

E) 30 m

Solución

La diferencia es 25.

La suma es S/ 3375.

Aplicamos la fórmula de la suma, aunque no se conozca el último término ni el número de términos.

$S_n = 1/2\ (a_1 + a_n)(n)$

$3375 = 1/2\ [(500 + 500 + (n - 1)(25)](n)$

$3375 = 1/2\ [\ 1000 + 25n - 25](n)$

$3375 = 1/2\ [975 + 25n](n)$

$3375(2) = 975n + 25n^2$

Ahora, dividimos entre 25.

$270 = 39n + n^2$

$n^2 + 39n - 270 = 0$

Finalmente, factorizamos.

$(n + 45) \wedge (n - 6) = 0$

$n_1 = -45 \wedge n_2 = 6$

La profundidad del tanque es de 6 m.

Respuesta B

Retos

Los retos son los desafíos que te impulsarán a desarrollar tus propias estrategias y permitirán verificar tus logros de aprendizaje. Para ello, tendrás que leer bien la situación (problema o ejercicio), comprenderla, analizar los datos, trazar un plan de acción y realizar las operaciones para comprobar luego el resultado. ¡Éxitos en tu proceso de aprendizaje!

1. En unos cultivos de bacterias se observó que la reproducción sigue una progresión geométrica cuya razón es 2. Si al inicio había 100 bacterias, ¿qué día se obtuvo una población de 102 400 bacterias?

A) 10
B) 11
C) 12
D) 13
E) 14

2. Las edades de 3 personas están en progresión geométrica. Si el producto de dichas edades es 512, y el menor tiene 2 años, ¿cuál es la edad del mayor?

A) 10
B) 16
C) 21
D) 44
E) 53

3. A Jaime le han regalado un rompecabezas de 720 piezas, para cuya construcción se pone como meta colocar cada día 5 piezas más que el día anterior, y así sucesivamente. Si el primer día colocó 60 piezas, ¿en cuántos días terminará de armar el rompecabezas?

A) 30
B) 20
C) 9
D) 5
E) 50

Resolvemos los retos

Reto 1

Colocamos los datos.

$a_1 = 100$

$r = 2$

$a_n = 102\ 400$

Aplicamos la fórmula.

$a_n = a_1 . r^{n-1}$

Reemplazamos.

$102\ 400 = 100(2)^{n-1}$

Simplificamos dividiendo por 100 ambos miembros.

$1024 = (2)^{n-1}$

Descomponemos el 1024.

$2^{10} = (2)^{n-1}$

Aplicamos la propiedad: si las bases son iguales, los exponentes son iguales. Entonces, simplificamos el 2 en ambos miembros.

$10 = n - 1$

Despejamos n y resulta $n = 11$.

Se obtuvo 102 400 bacterias en el decimoprimer día.

Respuesta B

Reto 2

Simbolizamos.

$a_1 = a_1 = 2$

$a_2 = a_1 r$

$a_3 = a_1 . r^2$

Planteamos el producto.

Simplificamos 2 y 512

$(2)(a_2)(a_3) = 512$

Reemplazamos

$(a_1 r)(a_3) = 256$

$(2r)(2r^2) = 256$

Despejando r

$(4)(r^3) = 256$

$r^3 = 64$

Extraemos la raíz cúbica a ambos miembros: $r = 4$.

Las edades son 2; 8 y 16.

El mayor tiene 16 años.

Respuesta B

Reto 3

Formamos la progresión.

60; 65; 70; 75; 80; ...

La diferencia es 5.

Aplicamos la fórmula de la suma.

$S_n = n/2\ [2a_1 + (n - 1)d]$

$720 = n/2\ [2(60) + (n - 1)(5)]$

$720 = n/2\ [120 + 5n - 5]$

$720(2) = n[115 + 5n]$

$1440 = 115n + 5n^2$

Extraemos la quinta y planteamos la ecuación de segundo grado.

$$n^2 + 23n - 288 = 0$$

Factorizamos.

$$(n + 32)(n - 9) = 0$$

Despejamos n en cada factor.

$$n = -32 \quad \text{y} \quad n = 9$$

Podrá terminar el rompecabezas en 9 días.

Respuesta C

Carl Friedrich Gauss dice sobre el aprendizaje lo siguiente:

“No es el conocimiento, sino el acto de aprendizaje, y no la posesión, sino el acto de llegar ahí, lo que concede el mayor disfrute”.

PREPÁRATE

SESIÓN

14

Razonamiento Matemático

Operaciones con expresiones algebraicas

PRONABEC

PERÚ Ministerio de Educación

Actividad: Utilizamos nuestros conocimientos de operaciones algebraicas para resolver diversos problemas

Operaciones con expresiones algebraicas

Recordamos conceptos básicos

Expresión algebraica

Es una expresión formada por la combinación de números y letras por medio de signos operatorios que representan operaciones algebraicas.

Ejemplo

$5x^2 – 8$

$1/2\ x^3 – 5x + 3$

$– 4/5\ m^2n^2 + 3xy$

Término algebraico

Es una expresión formada por números y letras llamadas constantes y variables, respectivamente, unidas por operaciones, como multiplicaciones, divisiones, potencias o raíces.

Ejemplo

$-6xy;\ x^4y^6$

Si los exponentes del término algebraico son enteros, la expresión es racional, pero si los exponentes son fraccionarios, la expresión se llamará irracional.

Las expresiones algebraicas se clasifican en monomios y polinomios.

Monomio

Es la expresión que tiene un solo término algebraico.

Polinomio

Es la expresión que tiene dos o más términos algebraicos.

Repasemos lo concerniente a grados absolutos y grados relativos de los términos algebraicos.

Grado de una expresión algebraica

Es una característica de las expresiones algebraicas (polinomios) relacionada con sus variables.

Grados de un polinomio

Grado relativo. Se refiere al exponente de cada una de las variables.

Grado absoluto. Está determinado por la suma de los exponentes de las variables.

$11x^5y^2$

GR $x = \mathbf{5}$

GA $= \mathbf{7}$

GR $y = \mathbf{2}$

Reducción de términos semejantes

Términos semejantes:

$11x + 9x = \mathbf{20x}$

Reducción.

Valor numérico de expresiones algebraicas

Calcular el valor numérico de una expresión algebraica es obtener la cifra que resultaría después de realizar todas las operaciones indicadas en la expresión cuando damos un valor a la variable o variables.

Calcular el valor numérico del monomio $11x^3$ para $x = 5$.

En este monomio el coeficiente es 11 y la variable tiene como exponente 3.

Resolvemos primero el exponente.

$= 11(5)^3$

$= 11(125)$

$= 1375$

El valor numérico $11x^3$ es 1375.

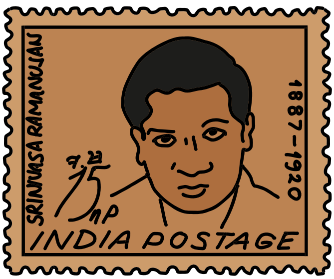
Operación algebraica

Es todo procedimiento en el cual se hace uso de expresiones algebraicas. En este se halla el resultado a partir de ciertos datos y siguiendo las técnicas operativas estudiadas en el conjunto R.

Número de Srinivas a Ramanujan

1729

$$1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$$



Situaciones problemáticas

Situación problemática 1

Tu mamá te pide que calcules cuánto costó la licuadora sabiendo que su costo fue el doble del precio de la arrocera. Además, si llevas S/ 320, recibes S/ 20 de vuelto.

A) 100
B) 120
C) 140
D) 160
E) 200

Solución

Restamos S/ 20 de S/ 320, y luego dividimos ese resultado entre 3. Tomar en cuenta que un artefacto cuesta el doble del otro y el total da 3.

Realizamos los cálculos.

$(320 - 20) / 3$

$300/3 = 100$

Costo de la arrocera: S/ 100

Multiplicamos por 2.

$2(100) = 200$

Obtenemos el precio de la licuadora.

Costo de licuadora: S/ 200

Respuesta E

Situación problemática 2

Un padre de familia posee un terreno de 630 m^2 y desea que sus hijos tengan una parte de dicho terreno para que lo puedan cultivar, por lo cual decide repartirlo en forma proporcional a sus edades. Si sus hijos tienen 18 años, 20 años y 25 años, respectivamente, ¿cuántos metros cuadrados le tocará a cada uno?

A) Al de 18 años = 180 m^2; al de 20 años = 200 m^2; al de 25 años = 250 m^2

B) Al de 18 años = 100 m^2; al de 20 años = 210 m^2; al de 25 años = 320 m^2

C) Al de 18 años = 160 m^2; al de 20 años = 190 m^2; al de 25 años = 280 m^2

D) Al de 18 años = 140 m^2; al de 20 años = 220 m^2; al de 25 años = 270 m^2

E) Al de 18 años = 120 m^2; al de 20 años = 180 m^2; al de 25 años = 330 m^2

Solución

Simbólicamente: $18x + 20x + 25x = 630$

Sumamos.

$63x = 630$

Dividimos.

$x = 630 / 63$

Por lo tanto, $x = 10$ y la variable vale 10.

Multiplicamos 18(10) = 180 m^2; 20(10) = 200 m^2 y 25(10) = 250 m^2.

Respuesta A

Situación problemática 3

De los tres grupos de términos, ¿cuáles contienen solo términos semejantes?

a) $3x^2$; x^2; $-5x^2$; $-5x^3$

b) $-2xy$; $+xy$; $-15xy$; $-xy$

c) $-5mn^2$; $-m^2n^2$; $-9m^3n$; $-1/2mn^2$

A) Las tres

B) a y b

C) b y c

D) b

E) c

Solución

Analizamos la primera: No, porque hay uno que tiene un exponente diferente a los demás.

Analizamos, la segunda: Sí, porque todos los términos son semejantes.

Analizamos la tercera: No, porque a pesar de que todos tienen las mismas variables, los exponentes difieren.

Respuesta D

Situación problemática 4

Simplificación de expresiones con signos de colección.

Ejemplo

$-5x + \{-6x + 8(3x - 7) - x\}$

A) $14x - 54$

B) $13x - 55$

C) $12x - 56$

D) $11x - 57$

E) $10x - 58$

Solución

Primero, quitar los signos de colección suprimiendo los signos de dentro hacia afuera, o viceversa. También debo considerar la ley de la multiplicación y la reducción de los términos semejantes.

Primera forma: suprimir signos de dentro hacia fuera

$$-5x + \{-6x + 8(3x - 7) - x\}$$

Se realiza el producto indicado para eliminar los paréntesis.

$$-5x + \{-6x + 24x - 56 - x\}$$

Se multiplican los signos para eliminar las llaves y luego se reducen los términos.

$$-5x - 6x + 24x - 56 - x$$

$$= 12x - 56$$

Respuesta C

Situación problemática 5

¿Cuál es el valor numérico de $M = x^3 + 3(x + 5)^2$, si $x = -2$?

A) 53

B) 44

C) 30

D) 19

E) 10

Solución

Reemplazamos el valor de x y efectuamos las operaciones que quedan indicadas.

$M = x^3 + 3(x + 5)^2$

$M = (-2)^3 + 3(-2 + 5)^2$

$M = -8 + 3(3)^2$

$M = -8 + 3(9)$

$M = -8 + 27$

$M = 19$

Respuesta D

Situación problemática 6

A una velada asistieron 18 jóvenes. Rosa bailó con 7 muchachos; Fanny, con 8; Vicky, con 9; y así sucesivamente hasta llegar a Nora, quien bailó con todos ellos. ¿Cuántos muchachos había en la reunión?

A) 15

B) 14

C) 13

D) 12

E) 10

Solución

La solución es sencilla si se elige con acierto la variable.

El número de chicos: x

Rosa bailó con $6 + 1 = 7$

Fanny bailó con $6 + 2 = 8$

Vicky bailó con $6 + 3 = 9$

Nora bailó con $6 + x$

Formamos la ecuación: $x + (6 + x) = 18$

Suprimimos paréntesis: $x + 6 + x = 18$

Reducimos términos semejantes: $2x = 18 - 6$

Despejamos: $x = 12 / 2$

$x = 6$

Reemplazamos valores en Nora, quien bailó con todos.

$6 + x = 6 + 6 = 12.$

Luego, el número de chicos será 12.

Respuesta D

Situación problemática 7

Las edades de tres personas están representadas por las siguientes expresiones: $A = 3x + 5$, $B = 3x - 10$ y $C = 2x + 7$. Hallar la suma de estas.

A) $8x + 2$

B) $5x - 3$

C) $6x - 5$

D) $5x + 12$

E) $8x + 2$

Solución

Representamos la suma de las edades.

$$A + B + C = (3x + 5) + (3x - 10) + (2x + 7)$$

Quitamos los signos de colección.

$$A + B + C = 3x + 5 + 3x - 10 + 2x + 7$$

Reducimos términos semejantes.

$$A + B + C = 8x + 2$$

Respuesta E

Retos

Los retos son los desafíos que te impulsarán a desarrollar tus propias estrategias y permitirán verificar tus logros de aprendizaje. Para ello, tendrás que leer bien la situación (problema o ejercicio), comprenderla, analizar los datos, trazar un plan de acción y realizar las operaciones para comprobar luego el resultado. ¡Éxitos en tu proceso de aprendizaje!

1. Hallar el resultado de restar $(m^4 + m^2 + 8{,}5)$ de $(7\,m^2 - 10\,)^2$.

   A) $48\,m^4 - 141\,m^2 + 91{,}5$
   B) $50\,m^4 - 139\,m^2 + 91{,}5$
   C) $49\,m^4 - 140\,m^2 + 91{,}5$
   D) $48\,m^4 - 140\,m^2 + 91{,}5$
   E) $47\,m^4 - 139\,m^2 + 91{,}5$

2. Si el polinomio $2x^{a+b}y^{a-2b} + 3{,}8x^by^{2b+a} - 12x^{a-b}y^8$ es homogéneo, calcular $(2a + b)(ab^3)$.

   A) 1020
   B) 1202
   C) 1152
   D) 1026
   E) 1453

3. Resolver la siguiente operación: $(x^2 + 2x)^2 - (3x - x^2)^2$

   A) $9\,x^3 - 5\,x^2$
   B) $10\,x^3 - 5\,x^2$
   C) $11\,x^3 - 6\,x^2$
   D) $12\,x^3 - 5\,x^2$
   E) $18\,x^3 - 6\,x^2$

Resolvemos los retos

Reto 1

Planteamos la operación.

$$(7\,m^2 - 10)^2 - (m^4 + m^2 + 8{,}5)$$

Realizamos la potencia indicada.

$$= 49\,m^4 - 140\,m^2 + 100 - m^4 - m^2 - 8{,}5$$

Reducimos términos semejantes.

$$= 48\,m^4 - 141\,m^2 + 91{,}5$$

Respuesta A

Reto 2

Un polinomio homogéneo es aquel en el que todos sus términos tienen el mismo grado absoluto.

$$2x^{a+b}y^{a-2b} + 3{,}8\,x^{b}y^{2b+a} - 12x^{a-b}y^{8}$$

Sumamos los exponentes de cada término y los igualamos para calcular los valores de a y b.

$$a + b + a - 2\,b = b + 2\,b + a = a - b + 8$$

Reducimos términos en cada miembro.

$$2\,a - b = 3\,b + a = a - b + 8$$

Formamos parejas de igualdades.

$$2\,a - b = 3\,b + a \quad \text{y} \quad 3\,b + a = a - b + 8$$

El resultado sería el siguiente:

$$a = 4\,b \quad \text{y} \quad 4\,b = 8$$

Por lo tanto, deducimos que $b = 2$.

Reemplazamos en la primera.

$$a = 4(2) = 8$$

Calculamos.

$(2a + b)(ab^3) = [(2(8) + 2)](8)(2^3)$

$= [16+2](8)(8)$

$= [18](8)(8)$

$= 1152$

Respuesta C

Reto 3

$= (x^2 + 2x)^2 - (3x - x^2)^2$

Realizamos las potencias indicadas.

$= (x^4 + 4x^3 + 4x^2) - (9x^2 - 6x^3 + x^4)$

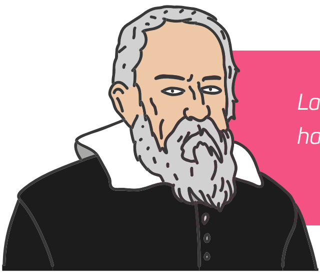
Suprimimos los signos de colección.

$= x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 9x^2 + 6x^3 - x^4$

Reducimos.

$= 10x^3 - 5x^2$

Respuesta B



Las matemáticas son el alfabeto con el cual Dios ha escrito el universo

Galileo Galilei

PREPÁRATE

SESIÓN

15

Razonamiento Matemático

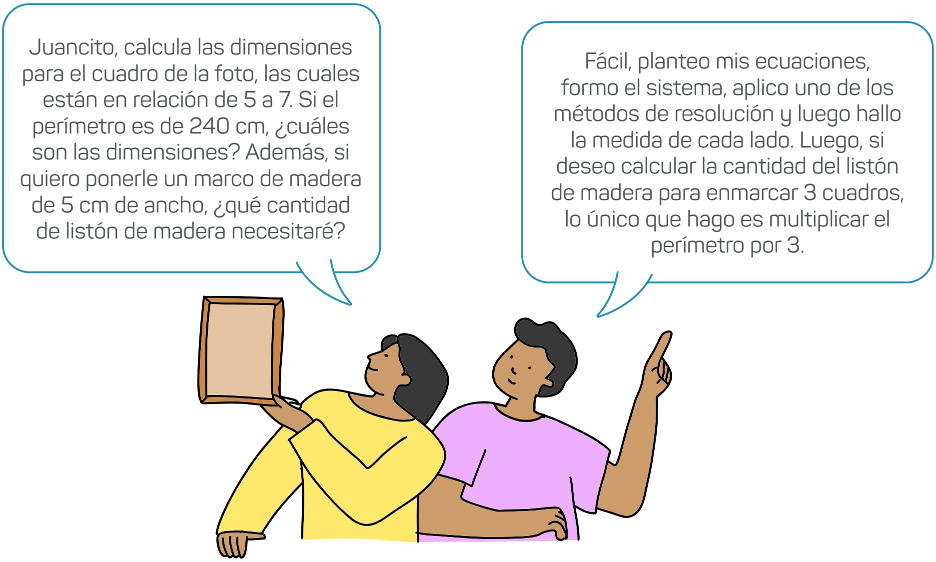
Sistemas de ecuaciones lineales (Parte I)

PRONABEC

PERÚ Ministerio de Educación

Actividad: Aplicamos nuestros conocimientos de sistemas de ecuaciones lineales para resolver problemas en la vida cotidiana

Sistemas de ecuaciones lineales (Parte I)



Recordamos conceptos básicos

Sistema de ecuaciones lineales

Es un conjunto de dos ecuaciones con dos variables cuyos valores satisfacen a ambas ecuaciones.

Ejemplo

$$\begin{cases} 4x - 3y = 2 \\ 5x - y = 8 \end{cases}$$

Los valores de x y y satisfacen a las dos ecuaciones: $x = 2$ y $y = 2$.

Solución de un sistema de ecuaciones

Es el conjunto de los valores de las variables que satisfacen todas las ecuaciones del sistema.

Sistemas equivalentes

Son aquellos que, a pesar de ser presentados de formas diferentes, tienen el mismo conjunto solución.

Clases de sistemas

- **Compatibles.** Son aquellos que tienen solución y pueden ser determinados e indeterminados.
- **Incompatibles**. Son los que no tienen solución, por ello, su conjunto solución es vacío.

Métodos

- Reducción
- Sustitución
- Igualación
- Determinantes
- Gráfico

Situaciones problemáticas

Situación problemática 1

Hace poco viajé al Cusco. El guía turístico tenía que comprar los boletos para ir a Machu Picchu. Éramos un grupo de 100 personas, entre extranjeros y nacionales, pero las tarifas eran diferentes. Los extranjeros pagaban $ 65 y los nacionales, $ 35. El número de extranjeros era mayor que el número de peruanos. Si en total el guía pagó $ 5300, ¿cuántos peruanos éramos en total?

A) 40

B) 55

C) 60

D) 65

E) 20

Solución

Tenemos lo siguiente:

Extranjeros = x

Nacionales = y

Planteamos el sistema.

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 65x + 35y = 5300 \end{cases}$$

Despejamos la primera.

$$x = 100 - y$$

Reemplazamos en la segunda.

$$65(100 - y) + 35y = 5300$$

Resolvemos.

$$6500 - 65y + 35y = 5300$$

$$6500 - 5300 = 65y - 35y$$

$$1200 = 30y$$

$$y = 1200 / 30$$

$$y = 40$$

Respuesta A

Situación problemática 2

Juan me dijo que se había presentado al examen de admisión y obtuvo 446 puntos. Cada respuesta correcta valía 5 puntos, y por cada incorrecta descontaban 2 puntos. Si en total eran 120 preguntas y él contestó todas, ¿cuántas preguntas correctas habría respondido?

A) 100

B) 98

C) 82

D) 46

E) 22

Solución

Tenemos lo siguiente:

C = respuesta correcta

I = respuesta incorrecta

Planteamos el sistema.

$$C + I = 120$$
$$5C - 2I = 446$$

Despejamos la primera.

$$C = 120 - I$$

Reemplazamos en la segunda.

$$5(120 - I) - 2I = 446$$

Resolvemos y obtenemos las incorrectas.

$$600 - 5I - 2I = 446$$
$$600 - 446 = 7I$$
$$154 = 7I$$
$$I = 154/7$$
$$I = 22$$

Al restar el número de incorrectas, tenemos las correctas:

$$C = 120 - 22$$
$$C = 98$$

Él resolvió 98 preguntas correctas.

Respuesta B

Situación problemática 3

El padre de José le dio a este su tarjeta de crédito para que realizara un pago, pero, como quería que su hijo hiciera uso de sus conocimientos de álgebra, le dijo que la clave estaba formada por un número de dos cifras repetidas 2 veces y que la suma de la unidad y la decena de dicho número era 13. Además, se sabe que la cifra de las unidades es menor que la de las decenas y que al restar 27 al número original sus cifras se invierten. ¿Cuál es la clave de la tarjeta?

A) 7373

B) 9494

C) 8585

D) 6262

E) 5454

Solución

Número: $\overline{ab}$

$$\begin{cases} a + b = 13 \\ \overline{ab} - 27 = \overline{ba} \end{cases}$$

Entonces, $10a + b - 27 = 10b + a$.

Observamos que el "*ab*" y "*ba*" no es un producto, sino la representación del número.

Despejamos de la primera ecuación.

$$a = 13 - b$$

Reemplazamos en la segunda ecuación.

$$10(13 - b) + b - 27 = 10b + 13 - b$$

Simplificamos.

$$130 - 10b + b - 27 = 9b + 13$$

Ordenamos.

$$130 - 27 - 13 = 9b + 10b - b$$

$$90 = 18b$$

$$90/18 = b$$

$$b = 5$$

$$a = 13 - 5 = 8$$

Ya sé cuál es la clave: 8585.

Respuesta C

Situación problemática 4

Hallar el mayor de 2 números si la suma de ellos es el mayor número de 4 dígitos y la diferencia de los mismos es el mayor número de 3 dígitos.

A) 2500

B) 3499

C) 4500

D) 5499

E) 6500

Solución

El número de cuatro dígitos es 9999 y el número de 3 dígitos es 999.

Los números serán x y y.

Planteamos el sistema.

$$\begin{cases} x + y = 9999 \\ x - y = 999 \end{cases}$$

Aplicamos el método de reducción.

Sumamos algebraicamente los términos de los miembros en forma vertical.

$2x = 10998$

$x = 10998/2$

$x = 5499$

Calculamos el valor de y reemplazando el valor de x en la primera o segunda ecuación.

$5499 + y = 9999$

$y = 9999 - 5499$

$y = 4500$

Por lo tanto, el número mayor es 5499.

Respuesta D

Situación problemática 5

Se cancela una deuda de S/ 990 con billetes de S/ 10 y de S/ 20. Si el número de billetes de S/ 20 es mayor que el número de billetes de S/ 10 y la diferencia entre ellos es 15, ¿cuántos billetes hay en total?

A) 23
B) 38
C) 61
D) 89
E) 140

Solución

Número de billetes de S/ 20 → x

Número de billetes de S/ 10 → y

Planteamos el sistema.

$$\begin{cases} x - y = 15 & (1) \\ 20x + 10y = 990 & (2) \end{cases}$$

Resolvemos mediante el método de sustitución.

Despejamos x en la primera ecuación.

$$x = 15 + y \qquad (3)$$

Reemplazamos en la segunda ecuación.

$$20(15 + y) + 10y = 990$$

$$300 + 20y + 10y = 990$$

Despejamos.

$$30y = 990 - 300$$

$$30y = 690$$

$$y = 690/30$$

$$y = 23$$

El valor de $y = 23$ lo reemplazamos en (3).

$$x = 15 + y$$

$$x = 15 + 23 = 38$$

El total de billetes es 23 + 38 = 61.

Respuesta C

Situación problemática 6

Se tiene un terreno de forma rectangular cuyo perímetro es 180 m. Si su área es de 2000 m^2, hallar la diferencia de las dimensiones.

A) 10 m

B) 12 m

C) 14 m

D) 16 m

E) 20 m

Solución

Perímetro: $2x + 2y = 180$

Área: $xy = 2000$

Aplicamos el método de igualación despejando una misma variable en ambas ecuaciones.

$$x = (180 - 2y) / 2 \quad \wedge \quad x = 2000 / y$$

Igualamos ambas ecuaciones.

$$(180 - 2y) / 2 = 2000 / y$$

Despejamos.

$$y(180 - 2y) = 2(2000)$$

$$180y - 2y^2 = 4000$$

Ordenamos.

$$0 = 2y^2 - 180y + 4000$$

Simplificamos.

$$0 = y^2 - 90y + 2000$$

$$0 = (y - 40)(y - 50)$$

Despejamos.

$$y = 40 \quad \wedge \quad y = 50$$

Las dimensiones son 40 m y 50 m y la diferencia entre ellas es 10 m.

Respuesta A

Situación problemática 7

En un barril se tiene una mezcla de vino y agua. Se sabe que las 3/4 partes del contenido menos 10 litros es vino y que 1/3 del total menos 5 litros es agua. Calcular el total de litros que contiene el barril.

A) 120

B) 150

C) 160

D) 170

E) 180

Solución

Contenido: $V + A$

$$V = 3/4(V + A) - 10$$
$$A = 1/3(V + A) - 5$$

Sumamos ambos valores.

$$C = 3/4(V + A) - 10 + 1/3(V + A) - 5$$

Hallamos el MCM = 12.

$$C = [9(V + A) - 120 + 4(V + A) - 60]/12$$
$$C = [13(V + A) - 180]/12$$

Si $C = V + A$, entonces $V + A = [13(V + A) - 180]/12$

Despejamos.

$$12(V + A) = 13(V + A) - 180$$
$$12V + 12A = 13V + 13A - 180$$
$$180 = 13V - 12V + 13A - 12A$$
$$180 = V + A$$

En el barril hay 180 litros de la mezcla.

Respuesta E

Retos

Los retos son los desafíos que te impulsarán a desarrollar tus propias estrategias y permitirán verificar tus logros de aprendizaje. Para ello, tendrás que leer bien la situación (problema o ejercicio), comprenderla, analizar los datos, trazar un plan de acción y realizar las operaciones para comprobar luego el resultado. ¡Éxitos en tu proceso de aprendizaje!

Reto 1

Halla la suma de los recíprocos de dos números si la suma de ellos es 13 y su diferencia es 8.

A) 10/105
B) 42/105
C) 52/105
D) 25/105
E) 21/105

Reto 2

Si al comprar 5 DVD y 3 CD pago S/ 41,80, y si compro 8 DVD y 9 CD invierto S/ 69,40, ¿cuál es el precio de un CD y de un DVD?

A) El CD cuesta S/ 0,5 y el DVD, S/ 9.
B) El CD cuesta S/ 0,6 y el DVD, S/ 8.
C) El CD cuesta S/ 0,7 y el DVD, S/ 7.
D) El CD cuesta S/ 0,8 y el DVD, S/ 6.
E) El CD cuesta S/ 0,9 y el DVD, S/ 5.

Reto 3

Las edades de Pedro y Luis, amigos de Jacinta, están en la relación de 5 a 7. Dentro de 3 años, la relación de las edades de Pedro y Luis será de 3 a 4. Si la edad de Jacinta es el promedio de las edades de sus amigos, ¿cuántos años tiene Jacinta?

A) 16 años
B) 17 años
C) 18 años
D) 19 años
E) 20 años

Resolvemos los retos

Reto 1

Planteamos el sistema.

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ x - y = 8 \end{cases}$$

Aplicamos el método de reducción.

$2x = 21$

Despejamos x.

$x = 21/2$

Reemplazamos para hallar el valor de y en la primera ecuación.

$21/2 + y = 13$

Despejamos y.

$y = 13 - 21/2$

$y = 5/2$

Como piden la suma de los inversos de dichos números, los invertimos

$S = 2/21 + 2/5 = (10 + 42)\ /105 = 52/105$

Respuesta C

Reto 2

Número de DVD = x

Número de CD = y

Planteamos el sistema.

$$\begin{cases} 5x + 3y = 41{,}80 & (1) \\ 8x + 9y = 69{,}40 & (2) \end{cases}$$

Multiplicamos toda la primera ecuación por (-3) para aplicar el método de reducción.

$$\begin{array}{l} -15x - \cancel{9y} = -125{,}40 \\ 8x + \cancel{9y} = 69{,}40 \\ \hline -7x = -56{,}00 \end{array}$$

$x = -56{,}00/-7$

Entonces, $x = 8$.

Calculamos reemplazando el valor en la ecuación (1).

$5(8) + 3y = 41{,}80$

$3y = 41{,}80 - 40$

$3y = 1{,}80$

Despejamos y.

$y = 1{,}80/3$

$y = 0{,}60$

El CD cuesta S/ 0,60 y el DVD, S/ 8.

Respuesta B

Reto 3

Edad de Pedro: x

Edad de Luis: y

Planteamos el sistema.

$$\begin{cases} x/y = 5/7 \\ (x + 3)/(y + 3) = 3/4 \end{cases}$$

Eliminamos denominadores.

$$\begin{cases} 7x = 5y \\ 4(x+3) = 3(y+3) \end{cases}$$

Despejando x en la primera y reemplazamos en la segunda.

$x = 5y/7$

$4(5y/7) + 12 = 3y + 9$

$20y + 84 = 21y + 63$

$84 - 63 = 21y - 20y$

$21 = y$

Entonces, $x = 5(21)/7 = 15$.

Pedro tiene 15 y Luis 21, entonces Jacinta tiene 18 años, que es el promedio de las edades de sus amigos.

Respuesta C

Todas las verdades de la Matemática están vinculadas entre sí.

Adrien-Marie Legendre

PREPÁRATE

SESIÓN
16

Razonamiento Matemático

Sistema de ecuaciones lineales (Parte II)

PRONABEC

PERÚ Ministerio de Educación

Actividad: Aplicamos nuestros conocimientos de sistemas de ecuaciones lineales para resolver problemas en la vida cotidiana

Sistema de ecuaciones lineales (Parte II)

¿Sabes? Estoy trabajando en una empresa automotriz y hay autos cuyos precios son de $ 15 000, $ 18 000 y $ 20 000. Si en total hay 10 autos y al vender algunos de $ 15 000 y $ 20 000 se obtuvo $ 105 000, y al vender otros de $ 18 000 y $ 20 000, se obtuvo $ 132 000, ¿cuántos autos de cada clase se vendieron?

¡Fácil! Para hallar el número de cada tipo de auto planteo las ecuaciones, formo el sistema, aplico uno de los métodos de resolución y luego te doy a conocer cuántos de cada tipo hay.

Recordamos conceptos básicos

Sistema de ecuaciones lineales con tres variables

Es un conjunto de tres ecuaciones con tres variables cuyos valores satisfacen a las tres ecuaciones.

Ejemplo

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 3y + 4z = 19 \\ 3x - 4y - 7z = -19 \end{cases}$$

Los valores de las variables x, y, z que satisfacen a las tres ecuaciones son $x = 2$, $y = 1$ y $z = 3$.

Solución de un sistema de ecuaciones

Es el conjunto de los valores de las variables que satisfacen todas las ecuaciones del sistema.

Sistemas equivalentes

Son aquellos que presentados de formas diferentes tienen el mismo conjunto solución.

Clases de sistemas

- **Compatibles.** Son sistemas que tienen solución y pueden ser determinados e indeterminados.
- **Incompatibles**. Son sistemas que no tienen solución. Su conjunto solución es vacío.

Métodos

- Reducción
- Sustitución
- Igualación
- Determinantes
- Gráfico

Situaciones problemáticas

Situación problemática 1

El otro día, en una revista vi una encuesta sobre el uso de internet en las y los adolescentes y se concluyó que es utilizada de 6 a 8 horas diarias, entre horas de estudio, trabajo y entretenimiento. A fin verificar si es verdad, le pregunté a mi hermana sobre el tiempo que invierte cuando usa internet para entretenimiento. Ella, que es una persona muy dedicada al estudio, con el afán de retarme me dijo: "Veo los videos de TikTok dos horas más que el tiempo que empleo al entrar al Facebook, y en Facebook estoy una hora y media más de lo que estoy en Instagram, y en Instagram estoy la mitad del tiempo que en TikTok. Si uso el celular 1/4 de las horas del día, ¿cuánto tiempo dedico a cada una de estas aplicaciones para entretenerme?".

A) Facebook = 1 h 12 min; TikTok = 3 h 12 min; Instagram = 1 h 36 min

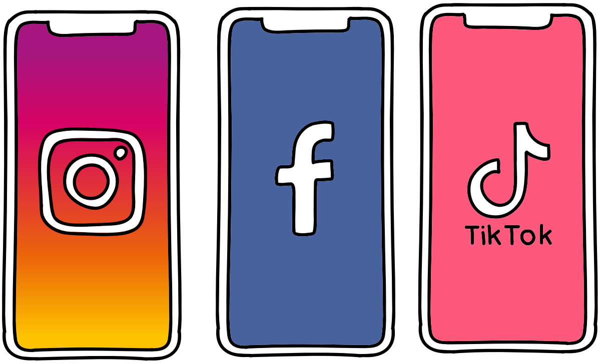
B) Facebook = 1 h 24 min; TikTok = 3 h 18 min; Instagram = 1 h 18 min

C) Facebook = 1 h 11 min; TikTok = 3 h 12 min; Instagram = 1 h 37 min

D) Facebook = 1 h 15 min; TikTok = 3 h 20 min; Instagram = 1 h 25 min

E) Facebook = 1 h 14 min; TikTok = 3 h 28 min; Instagram = 1 h 18 min

Solución



I + 1,5 F + 2 0,5 T

Primero, veamos cuántas horas utiliza el celular. Si dice 1/4 de las horas del día, equivale a 6 horas.

$F + I + T = 6$ horas al día

$T = F + 2$

$F = I + 1{,}5$

$I = 1/2T$

Para resolver este problema, vamos a emplear sistemas de ecuaciones. Por ello, todas las ecuaciones las pondremos en función de una sola variable. En este caso, elegimos la *F*.

Se sabe:

$F + I + T = 6.$

$T = F + 2$

$F = I + 1{,}5$

$I = 1/2T$

Reemplazamos el valor de T.

$I = 1/2(F + 2)$

Reemplazamos en la primera ecuación.

$F + [1/2(F + 2)] + (F + 2) = 6$

Suprimimos signos de colección.

$F + 1/2(F + 2) + F + 2 = 6$

Eliminamos denominadores.

$2F + F + 2 + 2F + 4 = 12$

Reducimos.

$5F = 6$

Despejamos.

$F = 6/5 = 1{,}2$ h $= 1$ h 12 min

Calculamos el tiempo utilizado en las otras dos aplicaciones.

TikTok: $T = 1$ h 12 min + 2 h = 3 h 12 min

Instagram: $I = 1/2$(3 h 12 min) = 1 h 36 min

Respuesta A

Situación problemática 2

El domingo fui con mis padres a un restaurante de comida criolla. Se veían tan ricos y apetecibles los platos que queríamos comer de todo, pero tuvimos que elegir lo que más nos gustaba. Así, pedimos un delicioso ceviche de entrada para cada uno, dos platos de arroz con pollo y un seco de cabrito. El costo total de los platos fue S/ 108, sin incluir las bebidas. Si el precio de 2 platos de arroz con pollo más 1 plato de seco de cabrito es igual al precio de 2 platos de ceviche más 8 soles, y el precio de un ceviche más un plato de seco excede en S/ 7 al precio de 3 platos de arroz con pollo, ¿cuánto cuesta cada plato?

A) ceviche = S/ 40; arroz con pollo = S/ 30; seco de cabrito = S/ 25
B) ceviche = S/ 20; arroz con pollo = S/ 15; seco de cabrito = S/ 18
C) ceviche = S/ 25; arroz con pollo = S/ 20; seco de cabrito = S/ 30
D) ceviche = S/ 18; arroz con pollo = S/ 10; seco de cabrito = S/ 22
E) ceviche = S/ 30; arroz con pollo = S/ 18; seco de cabrito = S/ 28

Solución

Simbolizamos el problema.

$$\begin{cases} 3C + 2A + S = 108 & (1) \\ 2A + S = 2C + 8 & (2) \\ C + S = 3A - 7 & (3) \end{cases}$$

Son tres ecuaciones con tres variables. Para resolverlas, podemos emplear los mismos métodos que usamos para resolver los sistemas de dos variables que estudiamos anteriormente.

Despejamos $2A$ de la primera y la segunda ecuación.

$$2A = 108 - 3C - S$$

$$2A = 2C + 8 - S$$

Igualamos ambas ecuaciones.

$$108 - 3C - S = 2C + 8 - S$$

Cancelamos S en ambas ecuaciones.

$$108 - 3C = 2C + 8$$

Despejamos C.

$$100 = 5C$$

$$C = 20$$

Despejamos S en (2) reemplazando C por su valor.

$$S = 2(20) + 8 - 2A$$

$$S = 40 + 8 - 2A$$

$$S = 48 - 2A$$

Despejamos S en (3) reemplazando C por su valor.

$$S = 3A - 7 - 20$$

$$S = 3A - 27$$

Igualamos ambas ecuaciones.

$48 - 2A = 3A - 27$

Despejamos A.

$48 + 27 = 5A$

$75 = 5A$

$A = 75/5$

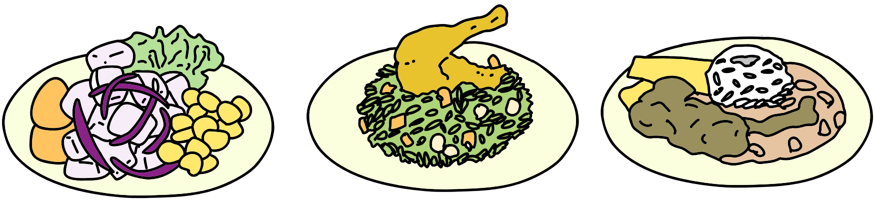
$A = 15$

Para calcular S reemplazamos en una de las ecuaciones anteriores.

$S = 48 - 2(15)$

$S = 48 - 30$

$S = 18$



S/ 20 S/ 15 S/ 18

Respuesta B

Situación problemática 3

Se deben instalar grandes paneles de nailon que se colocan en las partes más altas de las zonas con buenos soportes verticales, y captan entre 200 y 400 litros de agua.

En una zona del Cusco se instalan en total 26 paneles atrapanieblas, que permiten recoger 300 L, 330 L y 350 L de agua por día. La suma entre los paneles que recogen 300 L y 330 L es de 5640 L. Si al final del día se acumuló un total de 8440 L, ¿cuántos paneles de cada capacidad se han instalado?

A) 30 paneles de 300 L; 33 paneles de 330 L y 35 paneles de 350 L

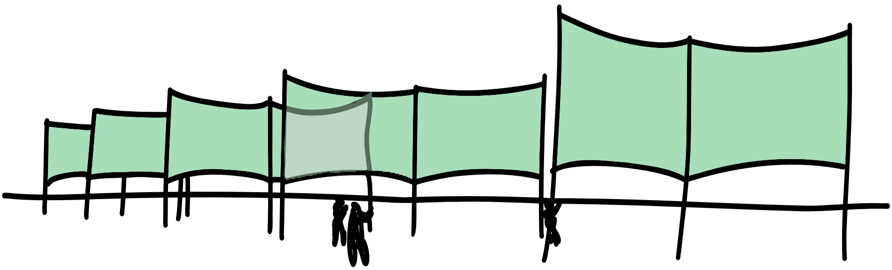
B) 12 paneles de 300 L; 14 paneles de 330 L y 16 paneles de 350 L

C) 10 paneles de 300 L; 8 paneles de 330 L y 8 paneles de 350 L

D) 15 paneles de 300 L; 10 paneles de 330 L y 10 paneles de 350 L

E) 20 paneles de 300 L; 16 paneles de 330 L y 10 paneles de 350 L

Solución



Habrá que leer nuevamente el problema, formular los datos y plantear las ecuaciones.

En total son 26 paneles:

$$x + y + z = 26$$

Ahora, planteamos el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x + y + z = 26 \quad (1) \\ 300x + 330y + 350z = 8440 \quad (2) \\ 300x + 330y = 5640 \quad (3) \end{cases}$$

Aplicamos el método de reducción en (2) y en (3).

$$\begin{cases} 300x + 330y + 350z = 8440 \quad (2) \\ 300x + 330y = 5640 \quad (3) \end{cases}$$

Multiplicamos (3) por −1.

$$\begin{cases} \cancel{300x} + \cancel{330y} + 350z = 8440 \quad (2) \\ \cancel{-300x} \cancel{-330y} = -5640 \quad (3) \end{cases}$$

$$\overline{350z = 2800}$$

$$z = 8$$

Ahora, relacionamos la ecuación (1) y (2) reemplazando el valor de z y simplificando la ecuación (2).

$$\begin{cases} x + y + 8 = 26 \\ 30x + 33y + 35(8) = 844 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 26 - 8 = 18 \\ 30x + 33y = 844 - 280 = 564 \end{cases}$$

Preparamos las ecuaciones para simplificarlas.

$$\begin{cases} -\cancel{30x} - 30y = -540 \\ \cancel{30x} + 33y = 564 \end{cases}$$

$3y = 24$

$y = 8$

Reemplazamos el valor de z y y en la ecuación (1).

$x + 8 + 8 = 26$

$x + 16 = 26$

$x = 26 - 16$

$x = 10$

El número de paneles atrapanieblas es el siguiente:

Capacidad 300 L = 10 paneles

Capacidad 330 L = 8 paneles

Capacidad 350 L = 8 paneles

Respuesta C

Situación problemática 4

Calcular las edades de tres hermanas si la suma de dichas edades es 62 años. Además, la edad de la mayor excede en 4 años a la edad de la menor, y la edad de la mayor sumada con la edad de la hermana que le sigue es 43 años.

A) 24; 20; 18

B) 23; 22; 17

C) 25; 21; 16

D) 23; 20; 19

E) 24; 21; 17

Solución

Número de hermanas: 3

Suma de edades: $A + B + C = 62$

A: mayor

B: intermedia

C: menor

Planteamos el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} A + B + C = 62 & (1) \\ A - C = 4 & (2) \\ A + B = 43 & (3) \end{cases}$$

Relacionamos (1) y (3) y reemplazamos (3) en (1).

$$A + B + C = 62$$
$$43 + C = 62$$
$$C = 62 - 43$$
$$C = 19$$

Reemplazamos el valor de C en (2).

$$A - 19 = 4$$
$$A = 4 + 19$$
$$A = 23$$

Reemplazamos en (1).

$$23 + B + 19 = 62$$
$$B = 62 - 23 - 19$$
$$B = 62 - 42$$
$$B = 20$$

Las hermanas tienen 23, 20 y 19 años, respectivamente.

Respuesta D

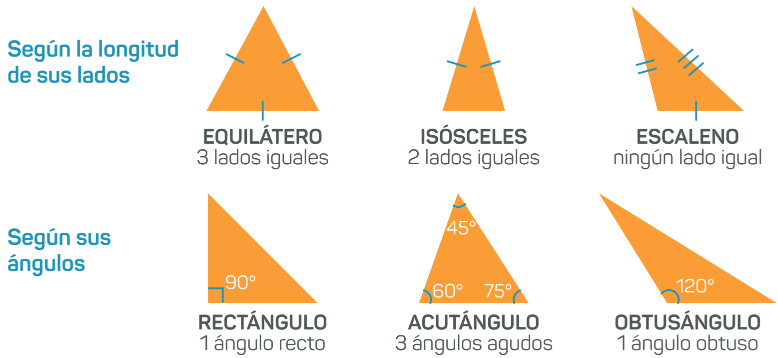
Situación problemática 5

¿Qué clase de triángulo es aquel cuyo ángulo mayor disminuido en 30° es igual al menor y este aumentado en 15° es igual al intermedio?

A) 80°; 60°; 40°
B) 70°; 60°; 50°
C) 75°; 65°; 40°
D) 85°; 65°; 30°
E) 75°; 60°; 45°

Solución

Clasificación de los triángulos



Suma de ángulos: $x + y + z = 180$

Ángulo mayor: x

Ángulo intermedio: y

Ángulo menor: z

Formamos el sistema y despejamos para trabajar en función a una sola variable.

$$\begin{cases} x + y + z = 180 \quad (1) \\ x - 30 = z \rightarrow x = z + 30 \quad (2) \\ z + 15 = y \quad (3) \end{cases}$$

Reemplazamos (2) y (3) en (1).

$$(z + 30) + (z + 15) + z = 180$$

Reducimos y despejamos.

$$3z = 180 - 45$$

$$z = 135/3$$

$$z = 45$$

Reemplazamos el valor de z en (3).

$$45 + 15 = y$$

$$y = 60$$

Reemplazamos en (1) los valores de z y y.

$$x + 60 + 45 = 180$$

$$x = 180 - 105$$

$$x = 75$$

Las medidas de los ángulos del triángulo son 45°, 60° y 75°; por lo tanto, es un triángulo acutángulo, porque todos sus ángulos son agudos, y un triángulo escaleno, porque no hay lados iguales.

Respuesta E

Situación problemática 6

Descomponer el número 38 en 3 sumandos, de tal manera que si le añadimos 10 al menor, le quitamos 6 al doble del mayor y le aumentamos 5 al intermedio, se obtenga el mismo número.

A) 15; 13; 10

B) 16; 12; 10

C) 17; 11; 10

D) 18; 12; 8

E) 19; 11; 8

Solución

$x + y + z = 38$

Mayor: x

Intermedio: y

Menor: z

Planteamos el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x + y + z = 38 & (1) \\ z + 10 = 2x - 6 = y + 5 = N & (2) \end{cases}$$

En la segunda ecuación podemos relacionar los términos de la siguiente manera:

$$z + \underbrace{10 = 2x - 6} = y + 5 = N \qquad (2)$$

$$z = 2x - 16$$

$$z + 10 = \underbrace{2x - 6 = y + 5} = N \qquad (2)$$

$$y = 2x - 11$$

Reemplazamos en (1).

$$x + (2x - 11) + (2x - 16) = 38$$

Suprimimos los paréntesis y despejamos.

$$5x = 38 + 27$$

$$x = 65/5$$

$$x = 13$$

Calculamos $y = 2(13) - 11$.

$y = 26 - 11$

$y = 15$

Calculamos $z = 2(13) - 16$.

$z = 26 - 16$

$z = 10$

El número 38 se descompone en los siguientes sumandos: 10, 15 y 13.

Respuesta A

Situación problemática 7

Una joven emprendedora decide iniciar su negocio de venta de celulares de 3 marcas diferentes: A, B y C. Los precios de A y B suman S/ 950, los de B y C suman S/ 650 y los precios de A y C suman S/ 1050. ¿Cuál es el precio de cada equipo?

A) S/ 265; S/ 375 y S/ 675

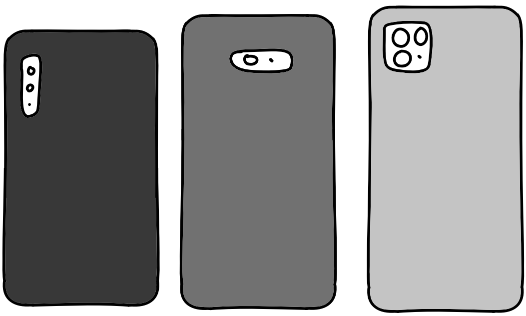
B) S/ 275; S/ 365 y S/ 675

C) S/ 275; S/ 375 y S/ 657

D) S/ 275; S/ 375 y S/ 675

E) S/ 265; S/ 385 y S/ 665

Solución



Simbolizamos los enunciados del problema.

Equipos: A, B y C

$$\begin{cases} A + B = 950 & (1) \\ B + C = 650 & (2) \\ A + C = 1050 & (3) \end{cases}$$

$$2A + 2B + 2C = 2650$$

Dividimos entre 2 toda la ecuación.

$$A + B + C = 1325$$

Reemplazamos los valores en esta ecuación.

$$C = 1325 - 950 = 375$$

$$A = 1325 - 650 = 675$$

$$B = 1325 - 1050 = 275$$

Los precios de los celulares son S/ 275; S/ 375 y S/ 675.

Respuesta D

Retos

Los retos son los desafíos que te impulsarán a desarrollar tus propias estrategias y permitirán verificar tus logros de aprendizaje. Para ello, tendrás que leer bien la situación (problema o ejercicio), comprenderla, analizar los datos, trazar un plan de acción y realizar las operaciones para comprobar luego el resultado. ¡Éxitos en tu proceso de aprendizaje!

Reto 1

Pedro tiene 1/5 del dinero que tiene Roberto, y Javier tiene 3/4 de lo que tiene Pedro. Si entre los tres tienen S/ 1080, ¿cuánto tendrían en total si se duplica la cantidad que tiene Pedro y si se le disminuye S/ 200 a Roberto?.

A) S/ 1020

B) S/ 1030

C) S/ 1040

D) S/ 1050

E) S/ 1060

Reto 2

Un padre de familia va a comprar ropa para sus hijos. Si compra 2 pantalones y 3 chompas, pagaría S/ 245; si compra 3 pantalones y 5 polos, pagaría S/ 311; y si compra 2 chompas y 3 polos, pagaría S/ 187. ¿Cuál es el precio de cada prenda de vestir?

A) pantalón S/ 52; chompa S/ 47; polo S/ 31
B) pantalón S/ 31; chompa S/ 47; polo S/ 52
C) pantalón S/ 47; chompa S/ 52; polo S/ 31
D) pantalón S/ 50; chompa S/ 45; polo S/ 35
E) pantalón S/ 60; chompa S/ 50; polo S/ 40

Reto 3

Un granjero tiene 120 cabezas de animales, entre chanchos, gallinas y pavos. La suma de 1/5 del número de chanchos más 1/10 del número de gallinas más 1/3 del número de pavos es 23, y la suma de pavos y gallinas es 80. ¿Cuántos pavos tiene el granjero?

A) 70 pavos
B) 40 pavos
C) 10 pavos
D) 60 pavos
E) 30 pavos

Resolvemos los retos

Reto 1

Pedro: x

Roberto: y

Javier: z

Planteamos el sistema.

$x + y + z = 1080 \quad (1)$

$x = 1/5y \quad (2)$

$z = 3/4x \rightarrow z = 3/4(1/5)y \quad (3)$

Aplicamos el método de sustitución en (1) y trabajamos todo en función a una sola variable.

$x + y + z = 1080$

$(1/5y) + y + (3/20)y = 1080$

Eliminamos denominadores con el MCM.

$4y + 20y + 3y = 1080(20)$

$27y = 1080(20)$

Simplificamos.

$y = 1080(20)/27$

$y = 40(20)$

$y = 800$

Reemplazamos el valor de y en (2) y (3).

$x = 1/5(800) = 160$

$z = 3/20(800) = 120$

Se pide el total de $2x + (y - 200) + z$.

Resolvemos.

$= 2(160) + (800 - 200) + 120$

$= 320 + 600 + 120$

$= 1040$

Respuesta C

Reto 2

Pantalón: x

Polo: y

Chompa: z

$$\begin{cases} 2x + 3z = 245 & (1) \\ 3x + 5y = 311 & (2) \\ 2z + 3y = 187 & (3) \end{cases}$$

Trabajamos con las ecuaciones (1) y (2).

Multiplicamos toda la primera ecuación por -3 y la segunda por 2 para aplicar el método de reducción.

$$\begin{cases} -\cancel{6x} - 9z = -735 \\ \cancel{6x} + 10y = 622 \end{cases}$$

$$10y - 9z = -113 \quad (4)$$

Formamos un sistema con (3) y (4) y multiplicamos por −10 la (3) y por 3 la (4).

$$\begin{cases} 3y + 2z = 187 \\ 10y - 9z = -113 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\cancel{30y} - 20z = -1870 \\ \cancel{30y} - 27z = -339 \end{cases}$$

$$-47z = -2209$$

Despejamos z.

$$z = -2209/-47$$

$$z = 47$$

Reemplazamos el valor de z en (3).

$$2z + 3y = 187$$

$$2(47) + 3y = 187$$

Despejamos y.

$$3y = 187 - 94$$

$$3y = 93$$

$$y = 93/3$$

$$y = 31$$

Reemplazamos en (2).

$3x + 5y = 311$

$3x + 5(31) = 311$

$3x = 311 - 155$

$x = 156/3$

$x = 52$

El pantalón cuesta S/ 52; la chompa, S/ 47; y el polo, S/ 31.

Respuesta A

Reto 3

Total de animales: 120

chanchos: x

gallinas: y

pavos: z

$$\begin{cases} x + y + z = 120 & (1) \\ 1/5\,x + 1/10y + 1/3z = 23 & (2) \\ y + z = 80 & (3) \end{cases}$$

Reemplazamos (3) en (1).

$x + y + z = 120$

$x + 80 = 120$

$x = 40$

Reemplazamos el valor de x en (1) y (2).

$$\begin{cases} 40 + y + z = 120 \text{ simplificamos, } y + z = 80 & (3) \\ 1/5(40) + 1/10y + 1/3z = 23 \end{cases}$$

Simplificamos.

$8 + 1/10y + 1/3z = 23$

Efectuamos la operación.

$1/10y + 1/3z = 15$

Eliminamos denominadores.

$3y + 10z = 450$ (4)

Formamos un sistema con (3) y (4) y con las variables z y y.

$$\begin{cases} y + z = 80 & \text{despejamos } y = 80 - z \text{ y reemplazamos en la siguiente ecuación:} \\ 3y + 10z = 450 \end{cases}$$

Reemplazamos el valor de y.

$3(80 - z) + 10z = 450$

Multiplicamos y despejamos z.

$240 - 3z + 10z = 450$

$7z = 450 - 240$

$z = 210/7$

$z = 30$

El número de pavos es 30.

Respuesta E

En la vida no existe nada que temer, solo cosas que comprender.

PREPÁRATE

SESIÓN
17

Razonamiento Matemático

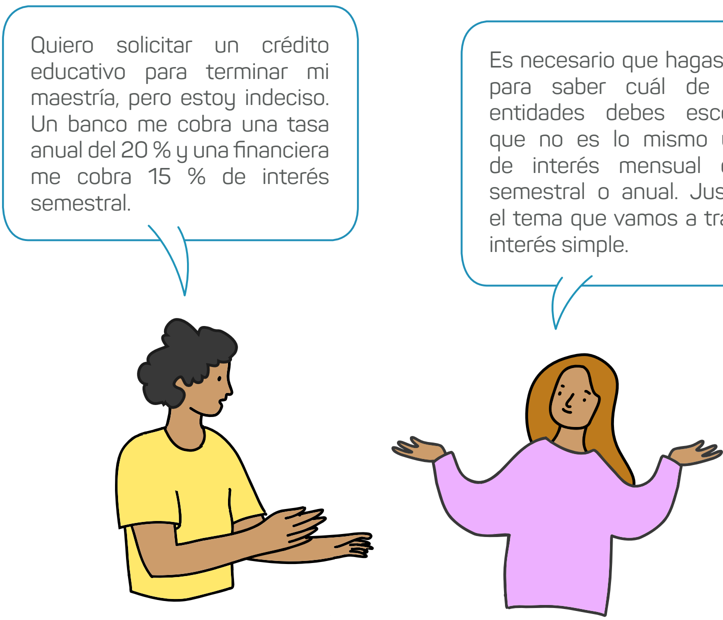
Interés simple

PRONABEC

PERÚ Ministerio de Educación

Actividad: Resolvemos situaciones problemáticas con el uso del interés simple

Interés simple



Desde tiempos muy remotos, en la sociedad en general, se realiza la actividad comercial destinada a prestar dinero por un lapso determinado y bajo la condición de pagar una cantidad adicional por dicho préstamo. Este tipo de transacción comercial fue sistematizada con el tiempo y ahora se usa en el ámbito comercial y financiero con mucho éxito. Los conceptos de interés, capital, tasas de interés y monto son términos muy usados y conocidos. En esta sesión trataremos sobre el interés simple que produce un determinado capital bajo ciertas condiciones de tiempo y tasa o rédito.

Recordamos los conceptos básicos

Interés
Es la ganancia o beneficio que produce el capital del préstamo durante cierto tiempo.

Interés simple
Se produce cuando el interés o ganancia que genera el capital del préstamo no se acumula al capital, es decir, el capital permanece constante.

Regla de interés
Es el proceso en el cual se determina el interés de un capital prestado según una tasa específica y durante un tiempo dado.

Elementos del interés simple

Capital (*C*)
Es la cantidad de dinero prestado.

Interés (*I*)
Es la cantidad adicional pagada por el uso del dinero.

Tiempo (*t*)
Lapso o periodo durante el cual se va a ceder o imponer el capital. Generalmente, se considera el mes comercial de 30 días y el año comercial de 360 días.

Tasa de interés o rédito (*r*)
Es la cantidad monetaria que se genera en un periodo determinado. Se expresa en tanto por ciento, y al realizar el cálculo se emplea su expresión decimal. Para ello, se debe tener en cuenta que el periodo y la tasa de interés deben estar en la misma unidad de tiempo.

Fórmula de interés simple

$I = C.r.t$

Monto (*M*)
Es la suma recibida al final del periodo y es igual al capital más el interés que genera el mismo.

$M = C + I$

$M = C[1 + r(t)]$

Situaciones problemáticas

Situación problemática 1

Una comunidad agrícola decide comprar un camión para transportar sus productos y poder comercializarlos en los lugares próximos a su comunidad. Para ello, solicita un préstamo a una entidad financiera que cobra una tasa de interés de 0,02 % diario. Si el camión cuesta $ 85 000 y se piensa pagar el préstamo en un periodo de 3 años, ¿cuál será la cantidad total que se pagará de interés?

A) $ 18 500
B) $ 18 360
C) $ 30 600
D) $ 186 000
E) $ 15 600

Solución

Capital del préstamo: $ 85 000

Tiempo: 3 años

Tasa de interés o rédito: 0,02 % diario

$r = 0{,}02(360) = 7{,}2\ \%$ anual

$r = 0{,}072$

Calculamos el interés simple.

$I = C.r.t$

$I = 85\,000\ (0{,}072)\ (3)$

$I = 18\,360$

Se pagará de interés $ 18 360

Respuesta B

Situación problemática 2

Carlos solicita un préstamo de S/ 2400 a un amigo, y se compromete a pagar una tasa de interés simple anual del 10 % para cancelar dicho préstamo en 2 años. ¿Cuál es el monto total que pagará Carlos al término de los 2 años?

A) S/ 2800
B) S/ 2680
C) S/ 3200
D) S/ 2880
E) S/ 3180

Solución

Capital prestado: S/ 2400

Tiempo: 2 años

Tasa o rédito: 10 % anual

Calculamos el interés.

$$I = 2400(0{,}10)(2) = 480$$

Calculamos el monto.

$$M = 2400 + 480 = 2880$$

Al termino de los dos años pagará un total de S/ 2880.

Respuesta D

Situación problemática 3

Un padre de familia se ve en la necesidad de solicitar un préstamo por S/ 12 000 a un banco. Dicho monto deberá pagarlo en cuotas mensuales iguales con una tasa de interés del 18 % anual y por un periodo de 5 años. ¿Qué tiempo transcurrió si hasta el momento ha pagado S/ 13 680?

A) 40 meses
B) 3 años
C) 32 meses
D) 38 meses
E) 4 años

Solución

Capital de préstamo: S/ 12 000

Monto pagado: S/ 13 680

Tasa de interés: 18 % anual

Tiempo inicial del préstamo: 5 años

Número de cuotas: 60

Tiempo transcurrido: ¿?

Calculamos el monto total a pagar en los 5 años.

$$M = 12\,000\,(1 + 0{,}18(5))$$

$$M = 12\,000\,(1{,}9)$$

$$M = 22\,800$$

Calculamos el valor de la cuota mensual que paga.

$$\text{Cuota} = 22\,800/60 = 380$$

Calculamos el número de cuotas que pagó.

$$N = 13\,680/380 = 36$$

Como las cuotas son mensuales, entonces pagó durante 36 meses, lo que equivale a 3 años.

Respuesta B

Situación problemática 4

Esperanza es una comerciante que dispone de cierto capital, el cual lo divide en dos partes, cuya diferencia es de S/ 1200. La mayor parte la deposita a plazo fijo y gana un interés del 8 % anual y la otra parte la deposita al 5 % semestral. Si después de un año los montos son iguales, ¿cuál era el capital inicial de Esperanza?

A) S/ 130 800
B) S/ 132 000
C) S/ 139 000
D) S/ 128 000
E) S/ 138 900

Solución

Capital total: $C_t = C_1 + C_2$

Diferencia de los capitales: $C_1 - C_2 = 1200 \rightarrow C_1 = 1200 + C_2$

Tasa de interés C_1: 8 % anual

Tasa de interés C_2: 5 % semestral

Tiempo: 1 año

Monto de cada capital: M_1 y M_2

Se sabe lo siguiente: $M_1 = M_2$

Reemplazamos M_1 y M_2.

$$C_1[1 + 0{,}08(1)] = C_2[1 + 0{,}1(1)]$$

$$C_1(1{,}08) = C_2(1{,}1)$$

Reemplazamos el valor de C_1 en la ecuación anterior.

$$(1200 + C_2)(1{,}08) = C_2(1{,}1)$$

$$1296 + (1{,}08)C_2 = (1{,}1)C_2$$

$$1296 = (1{,}1)C_2 - (1{,}08)C_2$$

$$1296 = (0{,}02)C_2$$

$$64\,800 = C_2$$

Calculamos el otro capital.

$$C_1 = 1200 + C_2$$

$$C_1 = 1200 + 64\,800$$

$$C_1 = 66\,000$$

El capital total de Esperanza será la suma de ambos capitales.

$$C_t = 64\,800 + 66\,000 = S/\ 130\,800$$

Respuesta A

Retos

Los retos son los desafíos que te impulsarán a desarrollar tus propias estrategias y permitirán verificar tus logros de aprendizaje. Para ello, tendrás que leer bien la situación (problema o ejercicio), comprenderla, analizar los datos, trazar un plan de acción y realizar las operaciones para comprobar luego el resultado. ¡Éxitos en tu proceso de aprendizaje!

Reto 1

Gerardo acude a una oficina de préstamos con el fin de solicitar S/ 5000 para solventar el costo del cambio de piso de su sala. Debe cancelar el préstamo dentro de tres meses con un interés simple mensual del 20 %. Por ello, firma un contrato en el cual se establece una cláusula que indica que, en caso de mora, deberá cancelar el 1 % de interés simple diario sobre la cantidad del préstamo y por un tiempo que exceda al plazo fijado. Si Gerardo paga el préstamo con 5 días de retraso, ¿cuál será el monto de la mora que paga?

A) S/ 280
B) S/ 400
C) S/ 350
D) S/ 450
E) S/ 800

Reto 2

Un comerciante hace un préstamo de S/ 9000 a su compadre con una tasa de interés anual del 14 % para que este dinero sea devuelto en 6 meses. ¿Qué suma le devolverá el compadre al vencerse el plazo?

A) S/ 9630
B) S/ 9450
C) S/ 9525
D) S/ 9550
E) S/ 9505

Reto 3

Un padre de familia solicita un crédito vehicular por un monto de $ 13 500 para la compra de un automóvil. La entidad financiera le cobra una tasa de interés anual del 18 % por 3 años. ¿Cuánto pagará de intereses al finalizar el periodo del préstamo?

A) $ 6280
B) $ 7280
C) $ 6290
D) $ 7290
E) $ 8720

Reto 4

¿A qué tasa de interés mensual fue prestado un capital de S/ 5000 que produjo un interés de S/ 2100 en 7 meses?

A) 4 %
B) 5 %
C) 6 %
D) 8 %
E) 3 %

Reto 5

Remigio se prestó S/ 1800 con un interés anual del 8 % durante un cierto tiempo. Esto produjo un total de interés de S/ 288. Calcula el número de días que duró el préstamo.

A) 360 días
B) 720 días
C) 365 días
D) 180 días
A) 300 días

Reto 6

Un capital se impone al 30 % de interés semestral durante un año y medio. Así, luego de ese tiempo, dicho monto se convierte en un total de S/ 3420. Calcular el capital.

A) S/ 1600
B) S/ 1200
C) S/ 1400
D) S/ 1500
E) S/ 1800

Resolvemos los retos

Reto 1

Calculamos el monto del préstamo.

$M = C[1 + r(t)]$

$M = 5000\ [1 + 0{,}20(3)]$

$M = 5000\ [1 + 0{,}6]$

$M = 8000$

Calculamos la mora o interés en función del monto a pagar.

$I = 8000(0{,}01)(5)$

$I = 400$

Luego, pagará S/ 400 de mora.

Respuesta B

Reto 2

Dinero que prestó: S/ 9000

Tasa de interés: 14 % anual

Tiempo: 6 meses = 0,5 años

Calculamos el monto que recibirá.

$M = 9000[1 + 0{,}14(0{,}5)]$

$M = 9000[1 + 0{,}07]$

$M = 9630$

Luego, el total de dinero que recibirá es S/ 9630.

Respuesta A

Reto 3

Total del préstamo: $ 13 500

Tasa de interés: 18 % anual

Tiempo: 3 años

Calculamos el interés que pagará.

$I = C.r.t$

$I = 13\,500(0{,}18)(3)$

$I = 7290$

Luego, pagará un interés total de $ 7290.

Respuesta D

Reto 4

Capital: S/ 5000

Interés: S/ 2100

Tiempo: 7 meses

Calculamos la tasa o rédito mensual.

$I = C.r.t$

$2100 = 5000(r)(7)$

$2100 = 35\,000\,(r)$

$0{,}06 = r$

$6\,\% = r$

Luego, la tasa fue de 6 % mensual.

Respuesta C

Reto 5

Total del préstamo: S/ 1800

Interés: S/ 288

Tasa de interés: 8 % anual

Tiempo que duró: t

Calculamos el tiempo.

$I = C.r.t$

$288 = (1800)(0{,}08)\,t$

$288 = 144\,t$

$2 = t$

Si la tasa de interés es anual, entonces el tiempo resultante es en años. Pero, como nos piden el número de días, se convierten los años a días.

Luego, el tiempo será de 720 días.

Respuesta B

Reto 6

Capital: C

Tasa de interés: 30 % semestral = 60 % anual

Tiempo: 1,5 años

Monto generado: S/ 3420

Calculamos el capital aplicando la fórmula de monto.

$M = C[1 + r(t)]$

$3420 = C[1 + 0,6(1,5)]$

$3420 = C[1 + 0,9]$

$3420 = (1,9)C$

$1800 = C$

Luego, el capital inicial fue de S/ 1800.

Respuesta E

Curiosidades:

Ciertos números cumplen algunos patrones que tienen unas particularidades interesantes. Observemos estas operaciones que involucran al número 9 y al 1.

0 x 9 + 1 = 1
1 x 9 + 2 = 11
12 x 9 + 3 = 111
123 x 9 + 4 = 1111
1234 x 9 + 5 = 11 111
12345 x 9 + 6 = 111 111

¿Hasta qué parte de la secuencia se cumplirá esta particularidad?
¿Cuál es la razón que se puede establecer para que se dé esta regularidad?

PREPÁRATE

SESIÓN

18

Razonamiento Matemático

Interés simple y compuesto

PRONABEC

REPÚBLICA DEL PERÚ PERÚ Ministerio de Educación

Actividad: Evaluamos situaciones problemáticas de inversión de capitales haciendo uso del interés simple y del interés compuesto

Interés simple y compuesto

En el mundo financiero hay una constante y esa es que el interés representa la oportunidad de que el dinero invertido crezca de forma rápida y que en un periodo de tiempo ese capital inicial se rentabilice. Eso quiere decir que ganará una tasa de interés que se optimizará mucho más si su capitalización es en periodos de tiempo más ventajosos. Todos estos procesos financieros están relacionados con los tipos de intereses simples o compuestos que se ofrecen en el sistema.

Recordamos los conceptos básicos

Interés simple

Se produce cuando el interés o ganancia que genera el capital de préstamo no se acumula al capital, es decir, el capital permanece constante.

Interés compuesto

Se produce cuando los intereses que genera un capital se suman al capital inicial al final de cada determinado tiempo. Así, de este modo, se genera un nuevo capital.

Capitalización

La capitalización es la rentabilización de un capital inicial durante un determinado tiempo y en función de un tipo de interés.

Fórmula de interés compuesto

$C_f = C_i(1 + r)^t \rightarrow C_f = M$

Capital final o monto: (C_f)

Capital inicial: (C_i)

Tiempo: (t)

Tasa de interés o rédito: (r)

Fórmula de interés con periodos de capitalización no anual

$$C_f = C\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n.t}$$

No olvidar que los periodos y la tasa de interés o rédito deben estar en las mismas unidades de tiempo.

También debemos recordar lo siguiente:

Semestre: 2 periodos en un año

Trimestre: 4 periodos en un año

Cuatrimestre: 3 periodos en un año

Bimestre: 6 periodos en un año

Mensual: 12 periodos en un año

Año bancario o comercial: 360 días

Ejemplo

Se coloca un capital de S/ 5000 con un interés del 10 % anual durante 3 años. A partir de ello, calculamos los dos tipos de interés: el simple y el compuesto.

Modalidad de interés simple:

$I = C.r.t$

$I = 5000(0{,}1)(3) = 1500$

Modalidad de interés compuesto:

$C_f = C_i\,(1 + r)^t$

$C_f = 5000(1+0{,}1)^3$

$C_f = 5000(1{,}1)^3$

$C_f = 5000(1{,}331) = 6655$

$I = C_f - C_i \rightarrow I = 6655 - 5000 = 1655$

Como se puede apreciar, la rentabilidad es mayor cuando se aplica el interés compuesto.

Situaciones problemáticas

Situación problemática 1

Victoria es una joven emprendedora que quiere seguir la carrera de Ingeniería Agrícola, pero no tiene los recursos suficientes y necesita solicitar un préstamo de S/ 10 000 en una entidad financiera, con una tasa anual del 10 % y capitalizable anualmente. ¿Cuál es el monto final que deberá pagar al término de los 3 años en los que pactó devolver el préstamo?

A) S/ 13 331
B) S/ 12 335
C) S/ 16 540
D) S/ 13 310
E) S/ 12 450

Solución

Capital de préstamo: S/ 10 000

Tiempo: 3 años

Tasa de interés o rédito: 10 % anual

Calculamos el interés compuesto.

$$C_f = C^i\,(1 + r)^t$$

$$C_f = 10\,000(1 + 0{,}1)^3$$

$$C_f = 10\,000\,(1{,}1)^3$$

$$C_f = 13\,310$$

Luego, el total a pagar al término de los tres años será de S/ 13 310.

También se puede resolver aplicando porcentajes. Así, cada año se deberá añadir el 10 % adicional y se calcula el monto.

$$M = 110\ \%(110\ \%)(110\ \%)(10\ 000)$$

$$M = \left(\frac{110}{100}\right)\left(\frac{110}{100}\right)\left(\frac{110}{100}\right)\left(10\ 000\right)$$

$$M = 13\ 310$$

Respuesta D

Situación problemática 2

Un padre de familia financia la carrera de su hija, que está estudiando Medicina. Para ello, decide ahorrar en una entidad bancaria que ofrece una muy buena tasa de interés. Si él desea obtener un monto de S/ 12 960 al cabo de dos años, ¿cuál deberá ser el capital inicial que depositará si se sabe que la tasa de interés de la financiera es del 20 % semestral, capitalizable semestralmente?

A) S/ 6250
B) S/ 6550
C) S/ 2592
D) S/ 3592
E) S/ 6520

Solución

Capital final: S/ 12 960

Tiempo: 2 años = 4 semestres

Tasa o rédito: 20 % semestral

Calculamos el capital inicial.

$$C_f = C^i\,(1 + r)^t$$

$$12\ 960 = C_i\left(1 + \frac{1}{5}\right)^4$$

$$12\,960 = C_i\left(\frac{6}{5}\right)^4$$

$$12\,960 = \left(\frac{1296}{625}\right)$$

$$12\,960(625)/1296 = C_i$$

$$6250 = C_i$$

Luego, el capital inicial fue de S/ 6250.

Respuesta A

Situación problemática 3

Un inversionista divide su capital en 3 partes iguales. Para la primera, fija un interés del 2 % mensual; para la segunda, un interés del 5 % trimestral; y para la tercera parte, un interés del 4 % semestral. Si logra obtener una renta anual de S/ 26 000, ¿cuál era su capital inicial?

A) 100 000
B) 175 000
C) 150 000
D) 50 000
E) 160 000

Solución

Capital inicial: 3x

Tasa de interés de la inversión A: 2 % mensual = 24 % anual

Tasa de interés de la inversión B: 5 % trimestral = 20 % anual

Tasa de interés de la inversión C: 4 % semestral = 8 % anual

Tasa anual: 24 % + 20 % + 8 % = 52 %

Renta anual igual a la utilidad o ganancia: S/ 26 000

Planteamos la ecuación.

$52\,\%(x) = 26\,000$

$x = 26\,000/0{,}52$

$x = 50\,000$

Calculamos el capital inicial.

$C = 3x = 3(50\,000) = 150\,000$

Luego, el capital inicial del inversionista es de S/ 150 000.

Respuesta C

Situación problemática 4

Pedro se asocia con su hermano para iniciar un negocio. Para ello, necesita un total de S/ 17 576, por lo que está evaluando depositar y rentabilizar su capital de S/ 15 625 para llegar a tener dicho monto. Después de visitar varias entidades financieras, se decide por una donde le ofrecen un interés del 12 % y con una capitalización cuatrimestral. ¿Cuánto tiempo deberá tener depositado su dinero en dicha entidad financiera para lograr su objetivo?

A) 1 año
B) 18 meses
C) 6 meses
D) 5 años
E) 2 años

Solución

Capital inicial: S/ 15 625

Rédito: 12 % cuatrimestral = 3 periodos al año

Monto a conseguir: S/ 17 576

Tiempo: t

Aplicamos la fórmula.

$$C_f = C\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n.t}$$

$$17\,576 = 15\,625\left(1 + \frac{0{,}12}{3}\right)^{3.t}$$

$$\frac{17\,576}{15\,625} = \left(1 + \frac{1}{25}\right)^{3.t}$$

Simplificamos y aplicamos la teoría de exponentes.

$$C_f = C\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n.t}$$

$$\frac{26^3}{25^3} = \left(\frac{26}{25}\right)^{3.t}$$

$$\left(\frac{26}{25}\right)^3 = \left(\frac{26}{25}\right)^{3.t}$$

$$3 = 3t$$

$$1 = t$$

Luego, el tiempo será de 1 año.

Respuesta A

Retos

Los retos son los desafíos que te impulsarán a desarrollar tus propias estrategias y permitirán verificar tus logros de aprendizaje. Para ello, tendrás que leer bien la situación (problema o ejercicio), comprenderla, analizar los datos, trazar un plan de acción y realizar las operaciones para comprobar luego el resultado. ¡Éxitos en tu proceso de aprendizaje!

Reto 1

Un comerciante colocó su capital de S/ 50 000 al 3,5 % mensual en la modalidad de interés compuesto. Calcular el monto total que recibirá al cabo de un año.

A) S/ 70 000
B) S/ 75 000
C) S/ 63 000
D) S/ 66 000
E) S/ 71 000

Reto 2

Ricardo solicita un préstamo de S/ 800 con una determinada tasa de interés anual. Si él tuviera que pagar un interés de S/ 768 al cabo de dos años, ¿cuál fue la tasa de interés pactado?

A) 20 % trimestral
B) 40 % anual
C) 20 % anual
D) 40 % semestral
E) 10 % semestral

Reto 3

El precio de una maquinaria es de $ 180 000 al contado. El administrador de una empresa desea adquirirla. Para ello, conviene en pagar $ 80 000 como cuota inicial y el resto en 60 días con un recargo del 5 % sobre el precio al contado. ¿Qué tasa de interés simple anual pagó?

A) 53 %
B) 55 %
C) 56 %
D) 58 %
E) 54 %

Reto 4

¿Cuál es el tanto por ciento anual de interés que se ha impuesto a un monto de S/ 75 000, que en 24 días ha producido S/ 250?

A) 4 %
B) 5 %
C) 6 %
D) 8 %
E) 3 %

Reto 5

Se fijan los 4/9 de un capital al 12 %; la cuarta parte del resto, al 18 %; y lo que queda al 20 % de interés simple. Si se obtiene una renta anual de S/ 64 020, ¿cuánto fue el monto del capital?

A) 396 000
B) 386 000
C) 369 000
D) 368 000
E) 379 000

Reto 6

Si se tiene un capital de S/ 5000, ¿en qué tiempo dicho monto se convertiría en un total de S/ 5700 con un 7 % anual de interés?

A) 2 días
B) 2 años
C) 2 meses
D) 2 semanas
E) 2 bimestres

Resolvemos los retos

Reto 1

Capital inicial → S/ 50 000

Rédito → 3,5 % mensual = 42% al año

Tiempo → 1 año

Monto final → C_f

Aplicamos la fórmula de interés compuesto

$$C_f = C_I (1 + r)^t$$

Reemplazamos datos

$$C_f = 50\,000\,(1 + 0{,}42)^1$$

$$C_f = 50\,000\,(1{,}42)$$

$$C_f = 71\,000$$

Por lo tanto, al término del año el comerciante recibirá S/ 71 000.

Respuesta E

Reto 2

Dinero que ahorró: S/ 800

Tasa de interés: *x*

Tiempo: 2 años

Interés ganado: S/ 768

Calculamos el rédito aplicando la fórmula de interés compuesto.

$C_i + I = C_i\,(1 + r)^t$

$800 + 768 = 800\,(1 + r)^2$

$1568 = 800\,(1+ r)^2$

$1{,}96 = (1+ r)^2$

$(1{,}4)^2 = (1 + r)^2$

Aplicamos la teoría de exponentes.

$1{,}4 = 1+ r$

$0{,}4 = r$

La tasa es del 40 % anual.

Respuesta B

Reto 3

Precio de maquinaria: $ 180 000

Cuota inicial: $ 80 000

Saldo a pagar: $ 100 000

Tiempo: 60 días = 2 meses

Hallamos el monto a pagar del saldo con el incremento del 5 %.

$M = 105\ \%(180\ 000)$

$$M = \frac{105}{100}(180\ 000) = 189\ 000$$

Calculamos la tasa de interés.

$$I = C.r.t$$

$$9000 = (100\,000)(r)\left(\frac{2}{12}\right)$$

Simplificamos.

$$9 = (100)(r)\left(\frac{1}{6}\right)$$

Despejamos *r*.

$$\frac{54}{100} = r$$

$$0{,}54 = 54\ \% = r$$

Pagó una tasa de interés simple del 54 %.

Respuesta E

Reto 4

Capital: S/ 75 000

Interés: S/ 250

Tiempo: 24 días

Calculamos la tasa o rédito mensual.

$$I = C.r.t$$

$$250 = 75\,000(r)\left(\frac{24}{360}\right)$$

Simplificamos.

$$1 = 300(r)\left(\frac{1}{15}\right)$$

$$1 = 20(r)$$

$$0{,}05 = r$$

$$5\ \% = r$$

La tasa fue de 5 %.

Respuesta B

Reto 5

Capital total →36 x

Capital 1 → 4/9(36x) = 16x →r = 12 %

Capital 2 →1/4 (36x-16x) = 1/4(20x)= 5x → r = 18 %

Capital 3 → (36x-16x-5x) = 15x → r = 20 %

Renta anual: 64 020

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$64\,020 = \frac{12}{100}(16x) + \frac{18}{100}(5x) + \frac{20}{100}(15x)$$

$$64\,020\,(100) = 192x + 90x + 300x$$

$$6\,402\,000 = 582x$$

$$11\,000 = x$$

Calculamos el capital total.

$$C = 36x = 36(11\,000) = 396\,000$$

Respuesta A

Reto 6

Capital: S/ 5000

Tasa de interés: 7 % anual

Tiempo: t años

Monto generado: S/ 5700

Calculamos el tiempo.

$I = C.r.t$

$5700 - 5000 = 5000(0,07)(t)$

$700 = 350(t)$

$2 = t$

Respuesta B

Curiosidades

El número de Hardy-Ramanujan es un número muy especial que se define como el número natural más pequeño que puede ser expresado como la suma de dos cubos positivos de dos formas diferentes. Este número es el 1729.

$1729 = 1^3 + 12^3$
$1729 = 9^3 + 10^3$

Si este es el número más pequeño, ¿cuál o cuáles serán los números mayores que cumplen este tipo de relación equivalente?
Te reto a que los descubras y menciones por lo menos tres pares de ellos.

PREPÁRATE

SESIÓN

19

Razonamiento Matemático

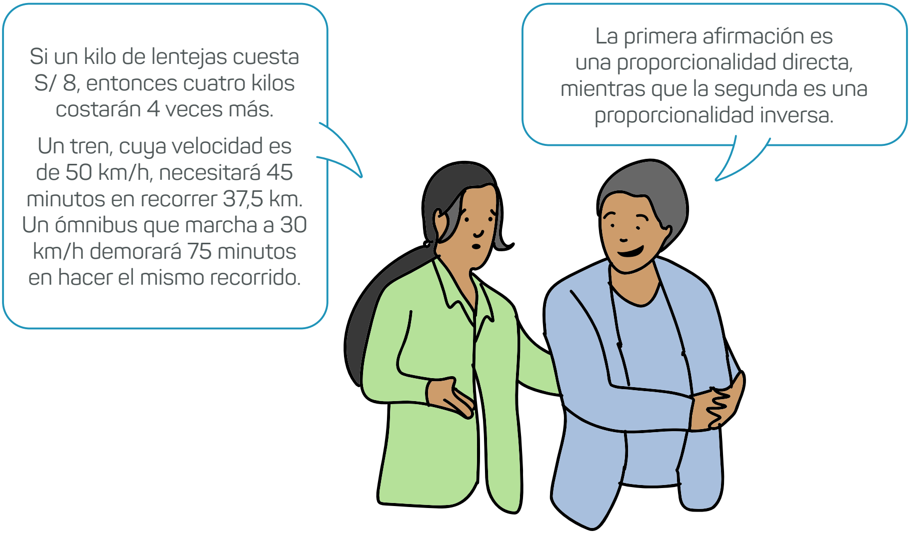
Relaciones de proporcionalidad directa e inversa

PRONABEC

PERÚ Ministerio de Educación

Actividad: Utilizamos las relaciones de proporcionalidad directa e inversa para resolver problemas

Relaciones de proporcionalidad directa e inversa



Recordamos conceptos básicos

Proporcionalidad

Cuando una razón se iguala a otra, se dice que existe proporcionalidad.

Clases

- **Simple directa.** Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al aumentar o disminuir una de ellas, la otra aumenta o disminuye en la misma proporción.
- **Simple inversa.** Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando al aumentar o disminuir una de ellas, la otra, contrariamente, disminuye o aumenta.

Razón de cantidades homogéneas

Comparación de dos cantidades por medio de la diferencia (razón aritmética) o la división (razón geométrica).

Proporción

Igualdad de razones aritméticas o geométricas.

Ejemplos

- "a" excede a "b" como 5 excede a 2:
  $a - b = 5 - 2 \rightarrow$ proporción aritmética
- "a" es a "b" como 3 es a 4:
  $a/b = 3/4 \rightarrow$ proporción geométrica

Propiedad fundamental de las proporciones

Simbólicamente, si a, b, c y d son términos de una proporción, con a y c como antecedentes y con b y d como consecuentes, se cumple en la proporción geométrica lo siguiente:

$a/b = c/d \rightarrow (a)(d) = (b)(c)$

Dos razones son iguales si el producto de los términos medios es igual al de los extremos.

Serie de razones iguales

$a/b = c/d = e/f = \mathrm{k}$

En una serie de razones iguales, la suma de los antecedentes dividida entre la suma de los consecuentes es igual a cualquiera de las razones dadas.

Magnitudes directamente proporcionales

Dos magnitudes diferentes son directamente proporcionales cuando sus cocientes respectivos son iguales o constantes.

Dos magnitudes diferentes son inversamente proporcionales cuando sus productos respectivos son iguales o constantes.

Situaciones problemáticas

Situación problemática 1

La velocidad de un automóvil, que va desde un punto A hacia un punto B y tarda en llegar 13 horas, es de 60 km/h. ¿En cuánto tiempo recorrerá otro automóvil la misma distancia si su velocidad excede a la del anterior auto en 18 km/h?

A) 12 horas

B) 10 horas

C) 11 horas

D) 15 horas

E) 14 horas

Solución

Velocidad 1: 60 km/h

Velocidad 2: (60 + 18) km/h

Son magnitudes inversamente proporcionales, ya que a mayor velocidad se emplea menor tiempo.

Formamos la proporción: $60/78 = 13/x$.

Ahora, formamos la proporción inversa: $60/78 = x/13$.

Despejamos x.

$x = 60(13)/78$

$x = 780/78$

$x = 10$

Lo hace en 10 horas, tres horas menos que el anterior.

Respuesta B

Situación problemática 2

¿Sabías que el edificio más alto del Perú es el de la sede principal del Banco de la Nación de Lima, que tiene una altura de 135 m? Si comparo dicha altura con la de una casa de tres pisos, la relación aproximada de dichas alturas es de 27 a 2, y si la comparo con la del Westin Lima Hotel, la razón de proporcionalidad es de 9 a 8, lo cual quiere decir que el Westin mide como 8 veces una cantidad constante y el Banco de la Nación como 9 veces dicha constante. ¿Qué altura tiene el Westin Lima Hotel?

A) 110 m
B) 120 m
C) 125 m
D) 115 m
E) 105 m

Solución

Si el Banco de la Nación mide 9k, entonces se tiene lo siguiente:

$9k = 135$ m

$k = 135/9$

$k = 15$

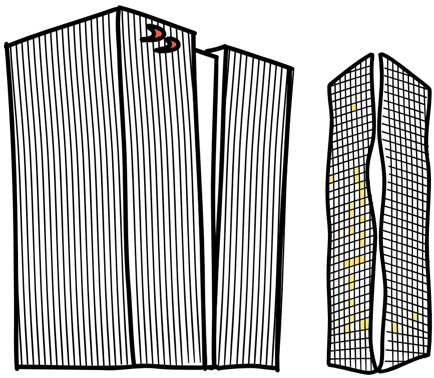
Si el Westin Lima Hotel mide 8k, entonces se tiene lo siguiente:

$= 8k$

$= 8(15)$

$= 120$ m

Respuesta B



Situación problemática 3

Todos los que vivimos en el condominio tenemos gastos que pagar, por lo que se ha establecido que estos sean repartidos en forma directamente proporcional a las áreas de las casas: aquel que tiene mayor cantidad de área paga más, mientras que aquel que tiene menos área paga menos. Un día el administrador nos convocó a una reunión en la cual dijo que el monto que se tenía que pagar por el cuidado de las áreas verdes era S/ 3300 mensual, y que se iba a repartir cantidades proporcionales a las áreas de cada casa, que son de 160 m^2, 200 m^2 y 300 m^2. Estas cantidades eran S/ 800, S/ 1000 y S/ 1500, respectivamente. Determinar si realmente las cantidades indicadas son directamente proporcionales a las áreas de la casa.

A) $a/160$; $b/200$; $c/300$

B) $a/200$; $b/250$; $c/300$

C) $a/260$; $b/280$; $c/330$

D) $a/280$; $b/300$; $c/360$

E) $a/300$; $b/360$; $c/400$

Solución

Total: S/ 3300

a, *b* y *c* son las cantidades que tienen que pagar cada grupo de casas.

Áreas: 160, 200, 300.

Como el costo del pago tiene que ser directamente proporcional a la cantidad de área, formamos las siguientes proporciones:

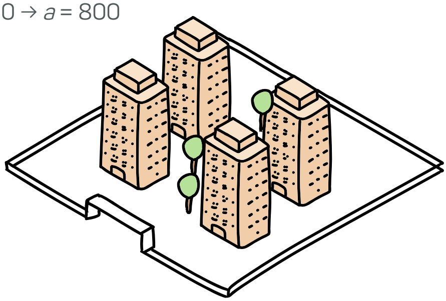
$$a/160 = b/200 = c/300 = k$$

Aplicamos la propiedad de la serie de razones iguales:

$$(a + b + c)/(160 + 200 + 300) = a/160 = b/200 = c/300$$

Calculamos "*a*".

$$3300/660 = a/160 \rightarrow 5 = a/160 \rightarrow a = 800$$



Calculamos "b".

$$3300/660 = b/200 \rightarrow 5 = b/200 \rightarrow b = 1000$$

Calculamos "c".

$$3300/660 = c/300 \rightarrow 5 = c/300 \rightarrow c = 1500$$

Respuesta A

Situación problemática 4

El crecimiento de la población hace que cada día aumente el número de construcciones de edificios multifamiliares que puedan albergar a más familias y, con ello, los trabajos de dichas construcciones aumentan cada día más en todas las regiones del país. Se quiere saber cuántas jornadas diarias de 8 horas tendrán que realizar 25 hombres para hacer una obra que 40 hombres hacen en 10 días en el mismo horario.

A) 12 días
B) 13 días
C) 14 días
D) 15 días
E) 16 días

Solución

Utilizaremos un cuadro comparativo.

Número de días	Número de trabajadores	Número de horas
x	25	8 h
10 d	40	8 h

Realizamos el análisis.

Menos hombres, más días de trabajo. Los días y el número de trabajadores son magnitudes inversamente proporcionales.

Formamos la proporción.

$$x/10 = 40/25$$

$$x = 10(40)/25$$

$$x = 16$$

Necesitarán 16 días.

Respuesta E

Situación problemática 5

En nuestra serranía se cultivan innumerables productos que abastecen a nuestra capital. La producción de verduras y hortalizas es muy buena. El padre de Margarita tiene dos terrenos semejantes de forma rectangular: en uno cultiva papas y en el otro, hortalizas. Se sabe que la parcela donde se cultivan papas tiene 210 m × 111 m, y la otra parcela tiene solo 37 m de ancho. Calcular el largo de la parcela donde cultiva hortalizas.

A) 73 m

B) 63 m

C) 70 m

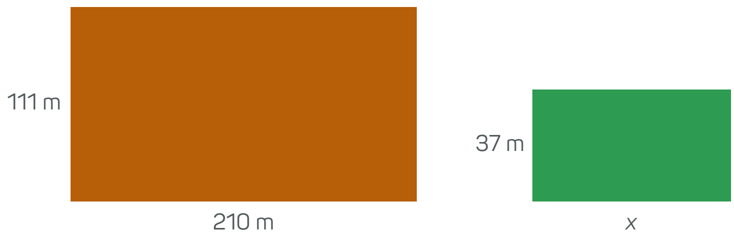
D) 83 m

E) 75 m

Solución

Debemos hacer una comparación mediante gráficos.

Dibujamos dos rectángulos semejantes. Ambos son iguales en forma, pero de diferente tamaño.



Utilizamos razones de proporcionalidad para compararlos.

$$111/210 = 37/x$$

Despejamos x.

$$x = (37)(210)/111$$

$$x = 7770/111$$

$$x = 70 \text{ m}$$

Por lo tanto, el largo de la parcela de hortalizas es de 70 m.

Respuesta C

Situación problemática 6

En los días de verano es muy común ver las sombras que tanto las personas como los objetos proyectan en el suelo o piso. El otro día que hubo un sol extraordinario fuimos caminando por el parque y nos dimos cuenta de que nuestras estaturas eran 1,76 m, 1,65 m y 1,54 m, y la sombra del más bajo medía 2,10 m. Íbamos a medir las demás, pero uno de nosotros dijo que ya no era necesario, ya que si se calcula la razón de proporcionalidad de una, se puede hallar la medida de las otras dos, porque es la misma. Por ello, ¿cuál es la medida de las otras sombras?

A) 1,90 m; 2,18 m

B) 1,92 m; 2,20 m

C) 1,94 m; 2,22 m

D) 2,25 m; 2,40 m

E) 1,98 m; 2,26 m

Solución

Se forman las razones de proporcionalidad: sombra/estatura o estatura/sombra.

Utilizamos la segunda y trabajamos en cm.

$$154/210 = 165/x = 176/y$$

Simplificamos la primera razón.

$$11/15 = 165/x = 176/y$$

Calculamos x.

$$11/15 = 165/x$$

$$x = 165(15)/11$$

$$x = 196$$

Calculamos y.

$$11/15 = 176/y$$

$$y = 176(15)/11$$

$$y = 240$$

Las otras dos sombras miden 2,25 m y 2,40 m, respectivamente.

Respuesta D

Situación problemática 7

Veamos, la siguiente situación:

Si se distribuyen S/ 99 en partes inversamente proporcionales a 2, 5 y 8, ¿cuáles son las cantidades?

A) S/ 65; S/ 25 y S/ 9
B) S/ 60; S/ 24 y S/ 15
C) S/ 50; S/ 23 y S/ 26
D) S/ 52; S/ 28 y S/ 19
E) S/ 40; S/ 28 y S/ 31

Solución

Para solucionar este problema buscamos primero las inversas de los números 1/2; 1/5 y 1/8.

Realizamos la suma de los tres quebrados.

$1/2 + 1/5 + 1/8 = 33/40$

A continuación, formamos las proporciones:

$x/1/2 = 99/(33/40)$

$2x = 99(40)/33$

$2x = 3960/33$

$x = 3960/33(2)$

$x = 3960/66$

$x = 60$

$y/1/5 = 99/(33/40)$

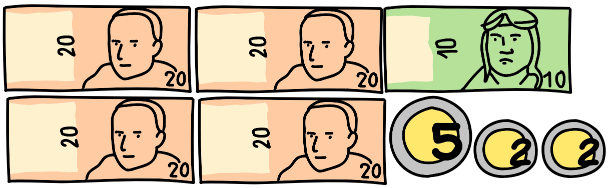
$5y = 99(40)/33$

$5y = 3960/33$

$y = 3960/33(5)$

$y = 3960/165$

$y = 24$



$z/1/8 = 99/(33/40)$

$8z = 99(40)/33$

$8z = 3960/33$

$z = 3960/33(8)$

$z = 3960/264$

$z = 15$

Las cantidades son S/ 60; S/ 24 y S/ 15.

Respuesta B

Retos

Los retos son los desafíos que te impulsarán a desarrollar tus propias estrategias y permitirán verificar tus logros de aprendizaje. Para ello, tendrás que leer bien la situación (problema o ejercicio), comprenderla, analizar los datos, trazar un plan de acción y realizar las operaciones para comprobar luego el resultado. ¡Éxitos en tu proceso de aprendizaje!

Reto 1

Pedro está estudiando Ingeniería y trabaja en una constructora diseñando planos. Si en cierto plano 1 cm representa 5 m en el terreno, ¿cuál será el área del terreno de forma cuadrada si en el plano está representado con un perímetro de 14 cm?

A) 306,25 m^2

B) 70 m^2

C) 1225 m^2

D) 1306 m^2

E) 1415 m^2

Reto 2

Tres personas se asocian y compran una propiedad en $ 150 000, para lo cual cada una dio cierta cantidad de dinero. Después de un tiempo, debido a los problemas económicos, la vendieron en $ 180 000. Si las partes que aportaron para la compra están en la relación de 4; 7 y 9, ¿cuánto ganó cada uno en la venta?

A) 5000; 10 500 y 13 500
B) 6000; 10 500 y 13 500
C) 6000; 105 000 y 13 500
D) 30 000; 6000 y 10 500
E) 20 000; 5000 y 12 500

Reto 3

Un grupo de 32 estudiantes va de campamento por fin de curso y lleva víveres para 5 días. Sin embargo, a última hora, se unieron al grupo algunos estudiantes más y ya no pudieron aumentar la cantidad de víveres. ¿Cuántos estudiantes se unieron al grupo si los víveres alcanzaron solo para 4 días?

A) 8
B) 10
C) 12
D) 40
E) 45

Resolvemos los retos

Reto 1

P = 14 cm

L = 3,5 cm

K = 1/5

K = 14/5(14)

K = 14/70

Perímetro del terreno: 70 m

P = L + L + L + L

Reemplazamos datos y simplificamos.

70 = 4 L

L = 70/4

Lado: 17,5 m

Área: (17,5)2

Área = 306,25 m2

Respuesta A

Reto 2

Ganancia: 180 000 – 150 000 = 30 000

Capital invertido: a, b y c

Relación: como 4; 7 y 9

$a/4 = b/7 = c/9 = K$

Aplicamos la propiedad:

$(a + b + c)/(4 + 7 + 9) = a/4$

30 000/20 = $a/4$

1500 = $a/4$

a = 1500(4)

a = 6000

1500 = $b/7$

b = 1500(7)

b = 10 500

$1500 = c/9$

$c = 1500(9)$

$c = 13\,500$

Cada uno recibirá 6000, 10 500 y 13 500, respectivamente.

Respuesta B

Reto 3

Son magnitudes inversamente proporcionales: si se aumenta el número de estudiantes los víveres duran menos días.

Número de estudiantes	Víveres
32	5
x	4

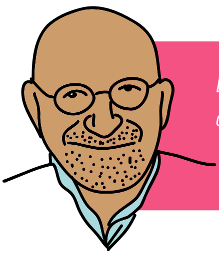
$x/5 = 32/4$

$x = 32(5)/4$

$x = 40$

Aumentaron: $40 - 32 = 8$

Respuesta A



La esencia de las matemáticas no es hacer las cosas simples complicadas, sino hacer las cosas complicadas simples

Stan Gudder

PREPÁRATE

SESIÓN

20

Razonamiento Matemático

Promedios

PRONABEC

PERÚ Ministerio de Educación

Actividad: Resolvemos situaciones problemáticas en las cuales se pueda aplicar el tema de promedios

Promedios

En muchos campos del conocimiento y, en especial, en la estadística, se utiliza el concepto de promedio o valor medio para conocer algunas variaciones porcentuales, cuyo análisis dependerá del escenario en el cual se aplican. Así, diariamente, se necesita tener información sobre el promedio de personas que asisten a un determinado lugar; el promedio de variación del costo de la canasta familiar; o el promedio de las notas de un estudiante. A continuación, presentaremos este concepto y su aplicación en situaciones problemáticas.

Recordamos los conceptos básicos

Promedio

Se denomina promedio a la cantidad media representativa de un conjunto de datos numéricos. Es un valor comprendido entre un valor máximo y un valor mínimo. Para que P sea promedio se debe cumplir que $a_1 \leq P \leq a_n$.

Promedio aritmético (PA)

Se denomina también media aritmética $(\overline{MA})$. Es el cociente obtenido entre la suma de todas las cantidades dadas y el número de dichas cantidades.

$$PA = \frac{S \text{ (Suma de datos)}}{n \text{ (número de datos)}}$$

$$PA = \frac{(a^1 + a^2 + a^3 + ...a^n)}{n}$$

Promedio geométrico (PG)

Es llamada también media geométrica $(\overline{MG})$. Es la raíz enésima del producto de n cantidades. Es el segundo promedio más importante, porque permite promediar índices porcentuales y tasas de crecimiento.

$$PG = \sqrt[n]{P}$$

$$PG = \sqrt[n]{(a_1)(a_2)(a_3)...(a_n)}$$

Su valor es menor o igual al promedio aritmético.

Promedio armónico (PH)

También se llama media armónica $(\overline{MH})$. Es la inversa del promedio aritmético de las inversas de "n" cantidades.

$$PH = \frac{\text{Cantidad de datos}}{\text{Suma de inversas de los datos}}$$

$$PH = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} ... + \frac{1}{a_n}}$$

Relación entre los tres tipos de promedios

$$PA \geq PG \geq PH$$

Propiedades que se cumplen para dos cantidades

Si a y b son dos cantidades, se cumple lo siguiente:

$$PA = \frac{a+b}{2}$$

$$PA = \sqrt{a+b}$$

$$PA = \frac{2.a.b}{a+b}$$

Se debe recordar que cuando no se especifica el promedio, se considera que es un promedio aritmético.

Situaciones problemáticas

Situación problemática 1

En una microempresa de exportaciones de productos no tradicionales el promedio de las edades de seis trabajadores es 33 años; tres de ellos tienen 31; 29 y 35 años; y ninguno de los restantes tiene menos de 28 años. ¿Cuál es la edad máxima que puede tener un trabajador en dicha microempresa?

A) 50
B) 49
C) 43
D) 37
E) 47

Solución

Edad máxima de un trabajador: x

Promedio de 6 edades: $PA = \dfrac{S(6)}{6} = 33$

Edades de tres trabajadores: 31; 29 y 35

La edad del resto es mayor o igual a 28 años.

Para calcular la edad máxima que puede tener un trabajador, suponemos que 2 empleados tienen 28 años.

Entonces, se plantea la ecuación.

$$PA = \frac{31 + 29 + 35 + 2(28) + x}{6} = 33$$

Despejamos la x.

$$95 + 56 + x = 33(6)$$

$$151 + x = 198$$

$$x = 198 - 151 = 47$$

Luego, la mayor edad que puede tener un trabajador de dicha microempresa es 47 años.

Respuesta E

Situación problemática 2

El promedio de las 10 calificaciones de Matemática de Maritza es 14. Afortunadamente, la docente del curso eliminó la menor nota de la estudiante. Así, logró que su promedio sea 16 y pudo estar en el tercio superior. ¿Cuál fue la nota que eliminó la docente del curso?

A) 14
B) 10
C) 12
D) 11
E) 13

Solución

Promedio inicial: $PA = \dfrac{S(10)}{10} = 13 \rightarrow S(10) = 130$

Nuevo promedio: $PA = \dfrac{S(9)}{9} = 16 \rightarrow S(9) = 144$

Nota que se eliminó: x

Calculamos la nota eliminada.

$$x = S(9) - S(10) = 144 - 130 = 14$$

La nota más baja que se eliminó fue 14.

Respuesta A

Situación problemática 3

Las calificaciones de Renzo en 3 cursos del instituto son proporcionales a 3; 4 y 5, y el peso ponderado de cada curso es 5; 4 y 3, respectivamente. ¿Cuál es la mayor calificación que obtuvo Renzo si su promedio es 11,5?

A) 14
B) 17
C) 12
D) 16
E) 15

Solución

Elaboramos un cuadro con los datos.

Cursos	Notas	Ponderación
A	$3k$	5
B	$4k$	4
C	$5k$	3

$$PP = \frac{(3k)(5)+(4k)(4)+(5k)(3)}{5+4+3} = 11{,}5$$

Despejamos k de la ecuación.

$$(3k)(5)+(4k)(4)+(5k)(3) = (12)(11{,}5)$$

$$15k + 16k + 15k = 138$$

$$k = 138/46 = 3$$

Por lo tanto, la mayor nota de Renzo es 15.

Respuesta E

Situación problemática 4

Si se aumenta 6 a cada uno de los 2 números de una media armónica, el resultado excede en 7 a la media armónica de los números originales que es 9. Calcular la suma de dichos números.

A) 24
B) 14
C) 16
D) 20
E) 18

Solución

$$PH = \frac{2ab}{a+b} = 9$$

$$PH = \frac{2(a+6)(b+6)}{a+6+b+6} = 16$$

Suma de términos: $a + b$

En la primera ecuación despejamos a.b.

$$ab = 9(a+b)/2 = 4{,}5(a+b)$$

Resolvemos la segunda ecuación.

$$2(a+6)(b+6) = 16(a+b+12)$$

$$(a+6)(b+6) = 8(a+b+12)$$

$$ab + 6b + 6a + 36 = 8a + 8b + 96$$

$$ab - 2a - 2b = 96 - 36$$

$$ab - 2(a+b) = 60$$

Si $ab = 4{,}5(a + b)$, reemplazamos.

$$4{,}5(a + b) - 2\,(a + b) = 60$$

$$2{,}5(a + b) = 60$$

$$(a + b) = 60/2{,}5 = 24$$

Por lo tanto, la suma de los términos originales es 24.

Respuesta A

Retos

Los retos son los desafíos que te impulsarán a desarrollar tus propias estrategias y permitirán verificar tus logros de aprendizaje. Para ello, tendrás que leer bien la situación (problema o ejercicio), comprenderla, analizar los datos, trazar un plan de acción y realizar las operaciones para comprobar luego el resultado. ¡Éxitos en tu proceso de aprendizaje!

Reto 1

Se sabe que el promedio aritmético de las edades de 100 escolares es n. Si el promedio aritmético de 20 de los 100 estudiantes es $n + 4$, ¿cuál es el valor de n si el promedio aritmético de los otros 80 estudiantes es 13?

A) 13
B) 14
C) 17
D) 15
E) 16

Reto 2

El peso promedio de todos los estudiantes del aula A es 68 y de todos los estudiantes del aula B es 71. Si el peso promedio de ambas aulas es 70, y el número de estudiantes del aula B excede al aula A en 20, ¿cuántos estudiantes tiene el aula B?

A) 60
B) 40
C) 20
D) 80
E) 48

Reto 3

En un juego en red, César obtuvo puntajes que son números enteros. César juega tres partidos con un promedio de 114 puntos. Luego, juega dos partidos más donde obtiene el mismo puntaje en cada uno. Si el promedio de los cinco partidos es 120 puntos, ¿cuál es el puntaje obtenido en el partido 4 y 5?

A) 120
B) 121
C) 129
D) 125
E) 127

Reto 4

El promedio aritmético de dos números enteros es 40 y el promedio armónico de los mismos es 30. Hallar la diferencia de los números.

A) 30
B) 20
C) 10
D) 40
E) 22

Reto 5

Cuatro hermanos tuvieron que pagar un préstamo de dinero que solicitaron a un banco para la compra de un terreno. Para lograr dicho objetivo, cada uno de ellos realizó un aporte. Si ninguno aportó menos de S/ 4200, y el aporte promedio de los hermanos fue de S/ 5600, ¿cuál es el aporte máximo que podría haber dado uno de ellos?

A) 8500
B) 7900
C) 8000
D) 8900
E) 9800

Reto 6

El promedio de los pesos de 50 estudiantes es 63 kg. Si se retiran 10 estudiantes cuyo promedio de pesos es 50 kg, ¿en cuánto varía el promedio con relación al promedio inicial?

A) 2,20 kg
B) 1,25 kg
C) 2,75 kg
D) 2,25 kg
E) 3,25 kg

Resolvemos los retos

Reto 1

Total de estudiantes: 100

Promedio de edades: $PA = \dfrac{S(100)}{100} = n$

Promedio parcial de 20 estudiantes: $PA = \dfrac{S(20)}{20} = n + 4$

Despejamos.

$$S(20) = 20(n + 4)$$

Promedio parcial de 80 estudiantes: $PA = \dfrac{S(80)}{80} = 13$

Despejamos.

$$S(80) = 13(80) = 1040$$

Remplazamos en el promedio total.

$$PA = \frac{S(20) + S(80)}{100} = n$$

$$PA = \frac{20(n + 4) + 1040}{100} = n$$

Despejamos n.

$$20(n + 4) + 1040 = 100n$$

$$20n + 80 + 1040 = 100n$$

$$1120 = 80n$$

$$14 = n$$

Luego, el promedio de las edades de los estudiantes es 14.

Respuesta B

Reto 2

Peso promedio Aula A: 68

Peso promedio Aula B: 71

Peso promedio de ambas aulas: 70

Número de estudiantes Aula A: x

Número de estudiantes Aula B: $x + 20$

Planteamos las ecuaciones.

Aula A: $PA = \dfrac{S(A)}{x} = 68 \rightarrow S(A) = 68x$

Aula B: $PA = \dfrac{S(B)}{x+20} = 71 \rightarrow S(B) = 71\,(x + 20)$

Promedio de ambos:

$$PA = \frac{S(A) + S(B)}{x + x + 20} = 70 \rightarrow S(A) + S(B) = 70\,(2x + 20)$$

Reemplazamos los valores de S(A) y S(B).

$68x + 71\,(x + 20) = 70\,(2x + 20)$

$68x + 71x + 1420 = 140x + 1400$

$1420 - 1400 = 140x - 139x$

$20 = x$

Por lo tanto, el aula B tiene 40 estudiantes.

Respuesta B

Reto 3

Promedio de los 3 primeros juegos: PA = 114 puntos

Promedio de los 5 partidos: PA = 120 puntos

Puntaje del 4.° y 5.° juego: x

Planteamos la ecuación.

$$PA = \frac{114(3) + 2x}{5} = 120$$

Despejamos la variable.

$$114\,(3) + 2x = 600$$

$$2x = 600 - 342$$

$$2x = 258$$

$$x = 129$$

Por ello, en el 4.° y en el 5.° partido obtuvo 129 puntos en cada uno de ellos.

Respuesta C

Reto 4

Promedio aritmético:

$$PA = \frac{a+b}{2} = 40 \rightarrow a + b = 80 \quad (1)$$

Promedio armónico:

$$PH = \frac{2ab}{a+b} = 30 \rightarrow 2ab \;\; = 30\,(a+b) \quad (2)$$

Reemplazamos el valor de $a + b$ en la ecuación (2).

$2ab = 30(80)$

$ab = 1200$ (3)

Formamos un sistema con las ecuaciones (1) y (3).

$$\begin{cases} a + b = 80 \\ ab = 1200 \end{cases}$$

Resolvemos.

$a = 80 - b \rightarrow (80 - b)b = 1200$

$80b - b^2 = 1200$

$0 = b^2 - 80b + 1200$

$0 = (b - 60)(b - 20)$

$b_1 = 60$ y $b_2 = 20$

Los números son 60 y 20.

Por lo tanto, la diferencia entre ellos es 40.

Respuesta D

Reto 5

Número de hermanos: 4

Promedio aritmético: $PA = \dfrac{S(4)}{4} = 5600$

Despejamos.

$S(4) = 5600(4)$

$S(4) = 22\,400$

Suponemos que 3 de los hermanos aportaron S/ 4200 cada uno para considerar la cantidad máxima que podría dar el otro hermano.

Calculamos el aporte máximo.

$S(4) = 3(4200) + x$

$22\,400 = 12\,600 + x$

$9800 = x$

Respuesta E

Reto 6

El *PA* de 50 personas: $PA = \dfrac{S(50)}{50} = 63$

$S(50) = 63(50) = 3150$

El PA de las 10 que se retiraron: $PA = \dfrac{S(10)}{10} = 50$

$S(10) = 50(10) = 500$

Calculamos el promedio de los restantes.

$$PA = \frac{S(50) - S(10)}{40} = \frac{3150 - 500}{40} = \frac{2650}{40} = 66{,}25$$

Variación de promedios: V = 66,25 – 63 = 3,25

Respuesta E

Curiosidades

Si queremos practicar un juego de magia, podemos efectuar lo siguiente: Elegimos un número cualquiera de dos cifras; luego, le sumamos el producto de ese número por 20 y obtendremos un nuevo número.
A ese nuevo número lo multiplicamos por 481 y, curiosamente, obtendremos siempre un número de seis cifras en el que aparece tres veces repetido el número que elegimos inicialmente.

Ejemplo

Elegimos el 64.

Multiplicamos 64 x 20 = 1280.

Sumamos 64 + 1280 = 1344.

El resultado lo multiplicamos por 481.

1344 x 481 = 646464

¿Cuál es la explicación para que ocurra esta particularidad?

PREPÁRATE

SESIÓN

21

Razonamiento Matemático

Funciones lineales y afines

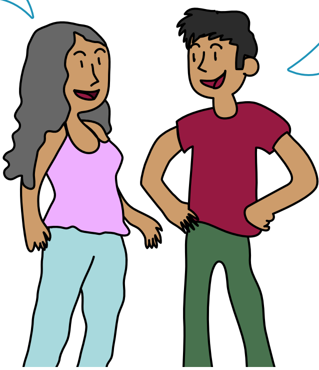
PRONABEC

PERÚ Ministerio de Educación

Actividad: Utilizamos nuestros conocimientos de funciones lineales y afines para resolver problemas cotidianos

Funciones lineales y afines

Ayer estaba jugando en línea en una cabina y, al término del juego, que duró 2,5 horas, la señora me cobró S/ 3 y a mi amigo, que estaba jugando 4 horas, le cobró S/ 3,50. Si la señora cobra por la primera hora S/ 2 y S/ 0,5 por cada hora siguiente, ¿por qué le cobró esa cantidad a mi amigo? No me explico.



Es fácil. Para saber por qué les cobró esa cantidad, podemos establecer una correspondencia entre dichas cantidades (horas y precio) mediante una función lineal. Donde *x* es el número de horas adicionales a la primera hora que estuvieron jugando.

Recordamos conceptos básicos

Función

Es un caso especial de correspondencia entre dos conjuntos, tal que un elemento del primer conjunto se relaciona con uno solo del segundo conjunto.

Se simboliza: f: A → B y se lee función de A en B.

Dominio y rango de la función

Dominio de la función. Es un conjunto inicial o preimagen.

Rango de función. Es un conjunto de llegada o conjunto imagen.

Reglas para determinar funciones

— Especificar el dominio, el rango y la ley de correspondencia.

— Especificar la fórmula algebraica $y = f(x)$.

— Mostrar la tabla de correspondencia de valores.

Representación gráfica de una función lineal

Se representa en un plano cartesiano ubicando los pares ordenados de la correspondencia.

Función afín

Está compuesta por dos funciones y su forma general es $f(x) = mx + b$, es un sinónimo de una función lineal.

Donde m y b son constantes, y m es diferente de cero.

Dominio de la función *D*(*f*)

Conjunto de todos los valores que puede tomar la variable x.

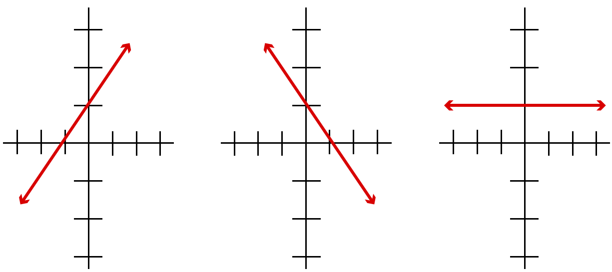
Rango de la función *R*(*f*)

Conjunto de todos los valores que puede tomar y.

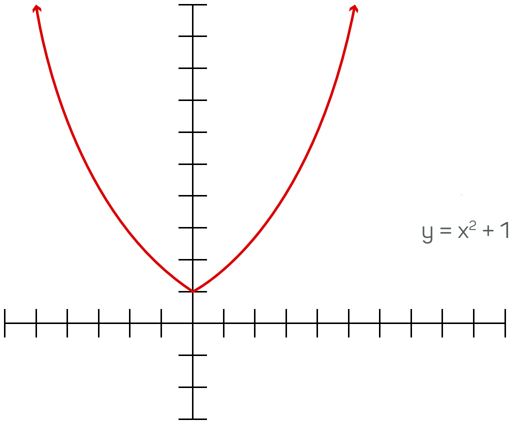
Representación gráfica línea recta

La gráfica de toda función de la forma $f(x) = mx + b$ de primer grado es una línea recta que corta al eje y en "b".

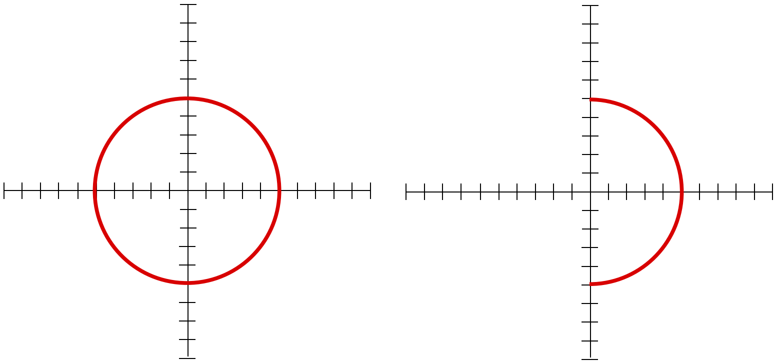
Observamos que todas son lineales, debido a que representan funciones de primer grado.



Función lineal de segundo grado



No es una función.



Situaciones problemáticas

Situación problemática 1

En el mes de octubre, el recibo de agua registró un consumo de 12 m^3 de agua potable y el importe fue S/ 17,99; en el mes de noviembre, se consumió 15 m^3 y el costo fue S/ 22,49; y en el mes de diciembre, se consumió 16 m^3. Si la tarifa por m^3 es 1,499, ¿cuánto se pagará en diciembre?

A) S/ 15,98
B) S/ 16,98
C) S/ 18,98
D) S/ 20,98
E) S/ 23,98

Solución

Lo que hacemos es tomar en cuenta el costo del m^3. Luego, si en octubre el consumo fue de 12 m^3 y su costo fue S/ 17,99, solo multiplicamos 12(1,499) y saldría S/ 17,988. Así, continuamos realizando la misma operación para noviembre y diciembre.

Ese cálculo lo podemos observar mejor en el siguiente cuadro:

m^3	1	12	15	16
Costo	S/ 1,499	S/ 17,988	S/ 22,485	S/ 23,984

En el mes de diciembre se pagó S/ 23,984.

Respuesta E

Situación problemática 2

Bien, veamos el caso de las distancias y los tiempos. Imagínate que un automóvil va a una velocidad constante de 100 km /h en una autopista. Para llegar de Lima a Ica se demora 3,03 horas; para ir de Lima a Arequipa, 9,66 h; y para desplazarse de Lima a Tacna, 12,93 horas. ¿A qué distancia aproximada se encuentra cada departamento de Lima?

A) Ica: 300 km; Arequipa: 900 km; Tacna: 1200 km

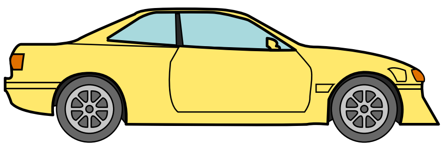
B) Ica: 302 km; Arequipa: 944 km; Tacna: 1266 km

C) Ica: 303 km; Arequipa: 966 km; Tacna: 1293 km

D) Ica: 330 km; Arequipa: 990 km; Tacna: 1369 km

E) Ica: 360 km; Arequipa: 999 km; Tacna: 1468 km

Solución



Yo puedo hacer el cálculo fácilmente. Si es una velocidad constante: $d = (v)(t)$, quiere decir que la distancia está en función del tiempo. Por lo tanto:

Distancia de Lima a Ica = 100(3,03) = 303 km

Distancia de Lima a Arequipa = 100(9,66) = 966 km

Distancia de Lima a Tacna = 100(12,93) = 1293 km

Claro que estos cálculos son aproximados, ya que el viaje en carretera requiere mucho más tiempo y también va a depender de cuántas paradas se realicen.

Respuesta C

Situación problemática 3

Ricardo es vendedor de electrodomésticos. Él recibe mensualmente un sueldo mínimo de S/ 930 más una comisión del 5 % por cantidad de ventas, lo cual incrementa su remuneración. El total de ventas realizadas en junio correspondió a un monto de S/ 2800; en julio, S/ 3400; en agosto, S/ 2500; en septiembre, S/ 4800. Calculemos cuánto ganó en los últimos 4 meses.

A) S/ 1070
B) S/ 2170
C) S/ 3225
D) S/ 4395
E) S/ 5325

Solución

Observemos el siguiente cuadro y lo completamos.

Para ello, establecemos la expresión algebraica que representa la función:

$f(x) = 930 + 5\,\%(x)$

Donde $f(x)$ representa la remuneración final.

Mes	Sueldo mínimo	Total de ventas	Comisión (5 %)	Remuneración final $f(x) = 1/20(x) + 930$
Junio	S/ 930	S/ 2800		
Julio	S/ 930	S/ 3400		
Agosto	S/ 930	S/ 2500		
Septiembre	S/ 930	S/ 4800		

Calculamos el 5 % de cada total de ventas. Luego, a ese monto, le sumamos el sueldo mínimo y obtenemos la remuneración mensual.

Ahora, observa el cuadro con los datos completos:

Mes	Sueldo mínimo	Total de ventas	Comisión (5 % = 1/20)	Remuneración final $f(x) = 1/20(x) + 930$
Junio	S/ 930	S/ 2800	S/ 140	S/ 1070
Julio	S/ 930	S/ 3400	S/ 170	S/ 1100
Agosto	S/ 930	S/ 2500	S/ 125	S/ 1055
Septiembre	S/ 930	S/ 4800	S/ 240	S/ 1170

Finalmente, para saber cuánto ganó en los últimos cuatro meses solo sumamos el monto que recibió en cada mes. El resultado es S/ 4395.

Muy bien, ya sabemos cuánto ganó Ricardo en cuatro meses.

Respuesta D

Situación problemática 4

Cada vez aumenta más el turismo en el país. Hay muchos lugares turísticos que debemos conocer. Por eso, cuando se presenta la oportunidad, las familias salen de viaje utilizando un bus de transporte. Sin embargo, a veces, cuando hay mucha gente y hay muchas maletas, estas se pueden perder. Si se debe a un descuido, no hay nada que hacer, pero si es responsabilidad de la empresa contratada, esta tiene que pagar un monto por la pérdida como indemnización.

Indecopi dio una resolución al respecto: el monto que tiene que pagar la empresa es la mitad del monto del pasaje multiplicado por el número de kilos del equipaje perdido.

Jorge sufrió la pérdida de su equipaje, el cual pesaba 12,5 kilogramos, y reclamó a la empresa. Si el pasaje le costó S/ 68, ¿cuánto recibirá Jorge de indemnización por parte de la empresa?

A) S/ 850
B) S/ 725
C) S/ 625
D) S/ 525
E) S/ 425

Solución

Podemos resolverlo fácilmente.

El monto está en función del peso:

$f(x) = 1/2\ (m)(x)$

$f(x) = 1/2\ (68)\ (12{,}5)$

$f(x) = 425$

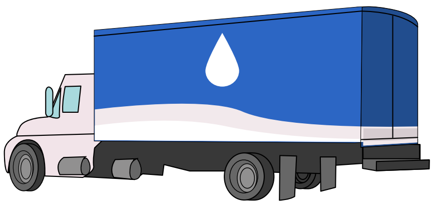
Recibirá S/ 425.

Respuesta E

Situación problemática 5

Jacinto es chofer de una empresa de productos lácteos. Él realiza entregas de estos productos desde el norte hasta el sur del país. Si recorre con una velocidad constante de 75 km/h una distancia de 525 km cada día y para cada 45 minutos, ¿cuánto tiempo demoró en dos días si en el primer día realizó cuatro paradas y en el segundo día paró dos veces?

A) 8,5 h
B) 10 h
C) 14,5 h
D) 16,5 h
E) 18,5 h



Solución

Para resolver esta situación, debemos establecer una correspondencia entre las magnitudes de tiempo y número de paradas.

Se sabe: $d = (v)(t) \rightarrow t = d/v$.

Señalamos la función:

$f(x) = 3/4x + t$

Día 1:

$t = 3/4(4) + 525/75 = 3 + 7 = 10\ h$

Día 2:

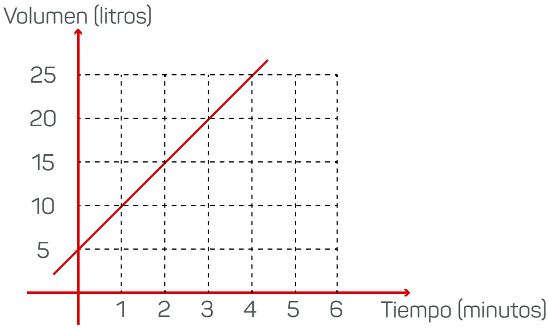
$t = 3/4(2) + 525/75 = 1{,}5 + 7 = 8{,}5\ h$

Tiempo en los dos días: 10 h + 8,5 h = 18,5 h

Respuesta E

Situación problemática 6

Hay muchas situaciones de la vida diaria en las que se establecen correspondencias entre magnitudes y estas se expresan gráficamente en un sistema de coordenadas. A continuación, se muestra la gráfica correspondiente al vaciado de un tanque de agua por minuto.



Determinar la cantidad de litros al termino de cuatro minutos.

A) 70 litros
B) 60 litros
C) 50 litros
D) 40 litros
E) 30 litros

Solución

Es sencillo. Observamos que es una función lineal. A mayor cantidad de tiempo, mayor vaciado de litros.

Por lo tanto, relacionamos cada minuto con la cantidad de litros.

1.^{er} minuto: 10 litros

2.º minuto: 15 litros

3.^{er} minuto: 20 litros

4.º minuto: 25 litros

Si se suman los litros por cada minuto, en total se tendrían 70 litros.

Respuesta A

Situación problemática 7

Veamos la siguiente situación:

Si $f(x) = 4x - 9$, ¿cuáles son los interceptos con los ejes x y y de la gráfica de la función?

Se sabe que toda función se puede representar en el plano cartesiano y que los interceptos son los puntos de intersección de la gráfica con los ejes de las coordenadas: el eje x de las abscisas y el eje y de las ordenadas.

A) (0; -5) y (5/4; 0)

B) (0; -6) y (6/4; 0)

C) (0; -7) y (7/4; 0)

D) (0; -8) y (8/4; 0)

E) (0; -9) y (9/4; 0)

Solución

Vamos a igualar $x = 0$ para hallar la coordenada de y.

$$f(0) = 4(0) - 9 = -9 \rightarrow y = -9$$

Para hallar la coordenada de x igualamos $y = 0$.

$$f(x) = y = 0$$

$$0 = 4x - 9$$

$$x = 9/4$$

Las coordenadas de los interceptos son (0; -9) y (9/4; 0).

Respuesta E

Retos

Los retos son los desafíos que te impulsarán a desarrollar tus propias estrategias y permitirán verificar tus logros de aprendizaje. Para ello, tendrás que leer bien la situación (problema o ejercicio), comprenderla, analizar los datos, trazar un plan de acción y realizar las operaciones para comprobar luego el resultado. ¡Éxitos en tu proceso de aprendizaje!

Reto 1

Rosita estaba resolviendo sus ejercicios de matemática y tuvo dificultad en uno de ellos: "¿Cuál es la función lineal: $f(x)= mx - b$, si $f(3) = 10$ y $f(5) = 4f(1)$?". Creo que tú puedes ayudarla y decirle cuál es la respuesta correcta.

A) $f(x) = -3x + 1$

B) $f(x)= -3x - 1$

C) $f(x) = 3x + 1$

D) $f(x) = 3x - 1$

E) $f(x) = -2x + 1$

Reto 2

Si $f(x) = 2x + 0,5$ y $g(x) = 2,4\,x - 1$, halla el valor de $M = f(f(3)) + g(2) - f(1)$.

A) 15,8

B) 14,8

C) 16,25

D) 16,8

E) 16,2

Reto 3

A Renata le gusta mucho preparar deliciosos pasteles y uno de sus favoritos es el de espinacas, que los hace muy ricos, según sus clientes. Se sabe que cada 100 gramos de espinaca producen 32 calorías. Ella tiene que hacer diferentes tamaños de pasteles en función al número de calorías.

Toma en cuenta que las relaciones de correspondencia que ella puede establecer se expresan en forma de pares ordenados:

$f(x) = \{(50; 16), (200; 64), (100; 32), (150; m), (n,128)\}$

Halla los valores de m y n.

A) m = 400 g y n = 48 cal

B) m = 25 g y n = 48 cal

C) m = 48 cal y n = 40 g

D) m = 48 cal y n = 400 g

E) m = 32 cal y n = 28 g

Resolvemos los retos

Reto 1

Rosita estaba resolviendo sus ejercicios de matemática y tuvo dificultad en uno de ellos: "¿Cuál es la función lineal: $f(x) = mx - b$, si $f(3) = 10$ y $f(5) = 4f(1)$?". Creo que tú puedes ayudarla y decirle cuál es la respuesta correcta.

Solución

La forma general de una función afín es $f(x) = mx + b$.

Sabemos lo siguiente:

$$f(3) = m3 + b = 10 \rightarrow 3m + b = 10 \qquad (1)$$

$$f(5) = m5 + b = 5m + b \qquad (2)$$

$$4f(1) = 4[m1 + b]= 4\ [m + b] = 4m + 4b \qquad (3)$$

Igualamos (2) y (3).

$5m + b = 4m + 4b$

$5m - 4m = 4b - b$

$m = 3b$

Reemplazamos en (1).

$3(3b) + b = 10$

$9b + b = 10$

$10b = 10 \rightarrow b = 1$

Por lo tanto, $m = 3(1) = 3$.

La función sería: $f(x) = 3x + 1$

Respuesta C

Reto 2

Si $f(x) = 2x + 0{,}5$ y $g(x) = 2{,}4x - 1$, halla el valor de $M = f(f(3)) + g(2) - f(1)$.

Solución

Hallamos primero cada función por separado y luego resolvemos la operación.

$f(f(3)) = [2(f(3)) + 0{,}5] = [\,2(2.3{+}0{,}5) + 0{,}5] = [2(6 + 0{,}5) + 0{,}5] = 13{,}5$

$g(2) = 2{,}4(2) - 1 = 4{,}8 - 1 = 3{,}8$

$f(1) = 2(1) + 0{,}5 = 2{,}5$

$M = 13{,}5 + 3{,}8 - 2{,}5 = 14{,}8$

Respuesta B

Reto 3

A Renata le gusta mucho preparar deliciosos pasteles y uno de sus favoritos es el de espinacas, que los hace muy ricos, según sus clientes. Se sabe que cada 100 gramos de espinaca producen 32 calorías. Ella tiene que hacer diferentes tamaños de pasteles en función al número de calorías. Toma en cuenta que las relaciones de correspondencia que ella puede establecer se expresan en forma de pares ordenados:

$f(x) = \{(50; 16), (200; 64), (100; 32), (150; m), (n; 128)\}$

Halla los valores de m y n.

Solución

Ordenamos los valores según los datos y los colocamos en una tabla. Luego, los analizamos.

Gramos	50	100	150	200	n
Calorías	16	32	m	64	128

Relacionamos.

Los gramos: $50 + 100 = 150 \rightarrow 16 + 32 = 48$ cal

Las calorías: $(64)(2) = 128 \rightarrow (200)(2) = 400$ g

Respuesta D

Las matemáticas hacen referencia, de hecho, solo a cosas que realmente existen, porque Dios creó el mundo, no un juego abstracto, en medida, peso y número.

PREPÁRATE

SESIÓN

22

Razonamiento Matemático

Funciones cuadráticas

PRONABEC

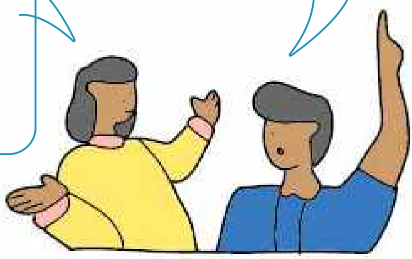
PERÚ Ministerio de Educación

Actividad: Aplicamos nuestros conocimientos de funciones cuadráticas para resolver problemas en la vida cotidiana

Funciones cuadráticas

Joaquín, ya me decidí: voy a estudiar Ingeniería. Por ello, empecé a observar diversas edificaciones, monumentos, parques, etc., y me llamó mucho la atención, entre otras cosas, los diversos tipos de construcciones. Así, por ejemplo, en Tacna hay un arco muy significativo en homenaje a los héroes de la guerra del Pacífico que tiene la forma parabólica.

Sí, en las construcciones se usan mucho las matemáticas, mediante cálculos y formas, y sobre todo relaciones y funciones. Para construir ese arco tuvieron que hacer uso de funciones cuadráticas, cuya forma general es $f(x) = ax^2 + bx + c$, y su representación gráfica es una parábola. Este concepto tiene muchas aplicaciones.



Recordamos conceptos básicos

Funciones cuadráticas

Forma general de la función cuadrática: $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$

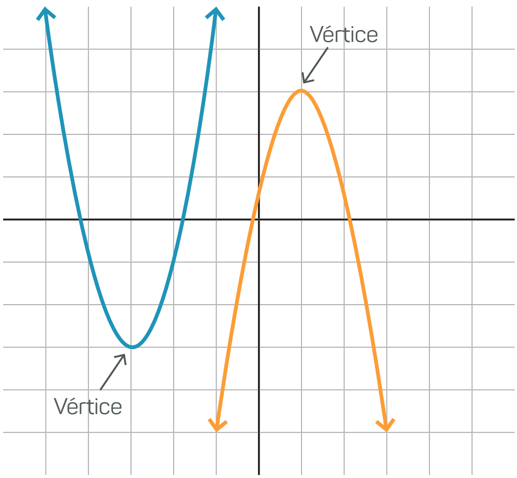
Donde ***a***, ***b*** y ***c*** son constantes, donde a es diferente de cero.

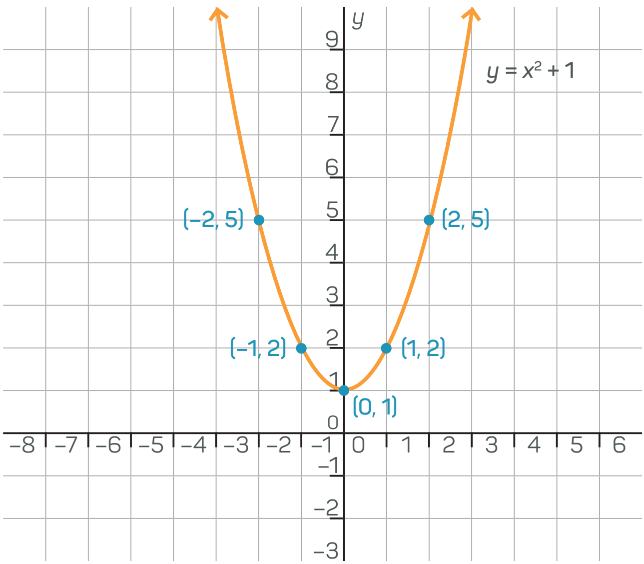
La gráfica de una función cuadrática es una parábola con eje vertical, cuya abertura depende del valor de ***a***: si es positivo, se abre hacia arriba, y si es negativo, se abre hacia abajo.

El dominio es R, si no se especifican los valores de *x*.

Los puntos máximos o mínimos de la parábola están dados por el vértice de la misma.

Gráfica de la función cuadrática



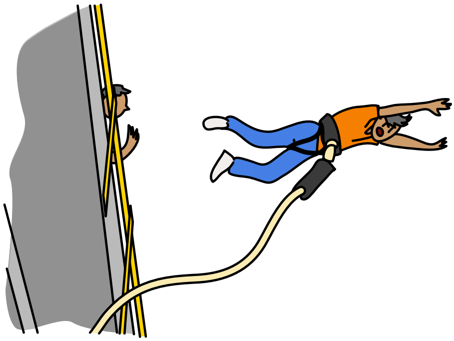


Situaciones problemáticas

Situación problemática 1

Si una persona que realiza puenting se demora en llegar al punto máximo de caída en un promedio de 10 s, se puede calcular la altura de la que cayó. Para efectos de dicho cálculo, se considerará el valor de la gravedad de 10 m/s^2.

A) 500 m
B) 480 m
C) 360 m
D) 250 m
E) 240 m



Solución

Tenemos lo siguiente:

$h = (g)(t)^2/2$

$h = (10)(10)^2/2$

$h = (10)\ (100)/2$

$h = 1000/2$

$h = 500$

Podemos decir que la altura es 500 m.

Respuesta A

Situación problemática 2

Calcular las dimensiones de un terreno de forma rectangular cuyo perímetro es 100 m y cuya área es la máxima posible.

A) Largo = 25 m; ancho = 25 m y área = 625 m^2
B) Largo = 30 m; ancho = 20 m y área = 600 m^2
C) Largo = 40 m; ancho = 10 m y área = 400 m^2
D) Largo = 20 m; ancho = 30 m y área = 600 m^2
E) Largo = 15 m; ancho = 35 m y área = 525 m^2

Solución

Utilizaremos un cuadro, pero antes hacemos una precisión:

Perímetro = 100 m

2(largo + ancho) = 100

(largo + ancho) = 100/2

Largo + ancho = 50

Largo	x	25	30	40	20	15
Ancho	$50 - x$	25	20	10	30	35
Área	$A = x(50 - x)$	A = 625	A = 600	A = 400	A = 600	A = 525

A medida que aumenta el largo, el ancho disminuye y el área también. Esto significa que la máxima área solo se consigue cuando el largo es igual al ancho. Entonces las dimensiones son 25 m y 25 m, es decir, un cuadrado.

Si nos damos cuenta, el problema habla de un rectángulo y no de un cuadrado. Sin embargo, sabemos que el cuadrado es un rectángulo, porque tiene sus 4 ángulos rectos.

Por ello, el cuadrado es un rectángulo, pero no todo rectángulo es un cuadrado.

Respuesta A

Situación problemática 3

Se sabe que en algunas regiones del país las lluvias son muy fuertes e intensas y si los techos no están preparados, estos pueden colapsar. Para evitar esto es necesario que, en las zonas donde se produce este tipo de lluvias, los techos sean de doble agua o, en todo caso, se instalen canaletas en los bordes para impedir el empozamiento del agua. Mario tiene una lámina de aluminio de 20 cm de ancho y quiere construir una canaleta, para ello debe doblar los extremos en forma perpendicular a la lámina. ¿Cuántos centímetros tiene que doblar a ambos extremos para que la canaleta tenga una capacidad máxima de almacenamiento?

A) 9 cm

B) 8 cm

C) 7 cm

D) 6 cm

E) 5 cm

Solución

Ancho de la lámina: 20 cm

Ancho del doblez: x

Si son 2 dobleces, uno a cada lado, será $2x$.

El ancho del centro: $20 - 2x$

Hallamos el área.

$f(x) = x(20 - 2x),\ 0 < x < 10$

$f(x) = 20x - 2x^2$

$= -2x^2 + 20$

$= -2(x^2 - 10)$

Para saber el valor de x, resolvemos completando cuadrados.

$f(x) = -2[x^2 - 10x + 25 - 25]$

$f(x) = -2[(x - 5)2 - 25]$

$f(x) = -2(x - 5)2 + 50$

$f(x)$ es máximo cuando $x = 5$, es decir cuando $f(x) = 50$

Respuesta E

Situación problemática 4

Dada la función $f(x) = x^2 - x + 3$, hallar el valor de $R = f(2) - 3f(-1) - f(f(0))$.

A) 5

B) 15

C) 3

D) −13

E) −18

Solución

En este caso, lo que hacemos es trabajar cada función por separado y luego reemplazamos los resultados obtenidos en R.

$f(2) = (2)^2 - 2 + 3$

$f(2) = 4 - 2 + 3$

$f(2) = 2 + 3$

$\mathbf{f(2) = 5}$

$3f(-1) = 3[\,(-1)^2 - (-1) + 3]$

$3f(-1) = 3[\,1 + 1 + 3]$

$3f(-1) = 3(5)$

$\mathbf{3f(-1) = 15}$

$f(f(0)) = (0^2 - 0 + 3)$

$\mathbf{f(f(0)) = 3}$

$R = 5 - 15 - 3$

$R = 5 - 18$

$R = -13$

Respuesta D

Situación problemática 5

Jacinto vive en el noveno piso de un edificio de 10 pisos y tenía que devolverle a su hermano una pelota de fútbol. Sin embargo, Jacinto no quiso bajar y su hermano tampoco quería subir. Por ello, tiró la pelota hacia abajo desde su ventana hasta el piso donde vive su hermano. Si la pelota demoró 2 s en chocar con el piso, ¿de qué altura se dejó caer la pelota?

A) 30 m
B) 27 m
C) 25 m
D) 20 m
E) 18 m

Solución

Lo que debemos hacer es calcular el número de metros en función del tiempo en segundos. Para ello, utilizaremos la fórmula de caída libre que está dada por la siguiente función:

$f(t) = h = gt^2/2$

No olvidemos que para efectos de cálculo rápido la $g = 10\ m/s^2$.

$h = (10)(2^2)/2$

$h = (10)(4)/2$

$h = 40/2$

$h = 20$ metros

Respuesta D

Situación problemática 6

Si la función tiene como ecuación f(x) = $x^2 - 4x + 4$, calcular *R*= f(8)/9 – f(9)/7 + f(7)/5.

A) 8

B) –8

C) 2

D) –2

E) 6

Solución

Hallamos f(8), f(9) y f(7) y luego los reemplazamos en R.

$f(8) = (8)^2 - 4(8) + 4$

$f(8) = 64 - 32 + 4$

$\mathbf{f(8) = 36}$

$f(9) = (9)^2 - 4(9) + 4$

$f(9) = 81 - 36 + 4$

$\mathbf{f(9) = 49}$

$f(7) = (7)^2 - 4(7) + 4$

$f(7) = 49 - 28 + 4$

$\mathbf{f(7) = 25}$

$R = 36/9 - 49/7 + 25/5$

$R = 4 - 7 + 5$

$R = 2$

Respuesta C

Situación problemática 7

Determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

Si $g(x)= 2x^2/3$, entonces $g(3) = 6$. ( )

La función $h(x) = 1/x^2$ no es una función cuadrática. ( )

La gráfica de una función cuadrática es una curva. ( )

A) VFV
B) VFF
C) FFF
D) VVF
E) VVV

Solución

I. Al reemplazar x = 3, $g(3) = 2(3)^2/3 = 2(9)/3 = 18/3 = 6$. (V)

II. No es una función cuadrática porque, cuando x = 1 o –1, la función no es continua. (F)

III. Es una parábola, no es cualquier curva. (F)

Respuesta B

Retos

Los retos son los desafíos que te impulsarán a desarrollar tus propias estrategias y permitirán verificar tus logros de aprendizaje. Para ello, tendrás que leer bien la situación (problema o ejercicio), comprenderla, analizar los datos, trazar un plan de acción y realizar las operaciones para comprobar luego el resultado. ¡Éxitos en tu proceso de aprendizaje!

Reto 1

Un terreno de forma rectangular tiene las siguientes dimensiones:
$(2x - 5)$m y $(4x + 3)$m. Determinar su área en función de x.

A) $A(x) = 8x^2 - 15x - 3$
B) $A(x) = 8x^2 - 14x - 8$
C) $A(x) = 8x^2 + 14x - 15$
D) $A(x) = 8x^2 - 14x - 15$
E) $A(x) = 8x^2 + 16x - 5$

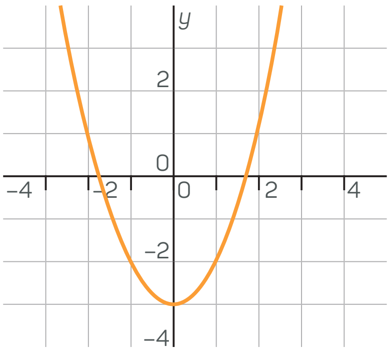
Reto 2

Una tienda de venta de bicicletas tiene una rentabilidad mensual en dólares, que está representada por la función $f(x) = x(40 - x)$. Si x representa el número de bicicletas que vende al mes, ¿cuántas bicicletas tiene que vender para obtener su máxima ganancia?

A) 20
B) 15
C) 17
D) 18
E) 13

Reto 3

Indicar el rango de la función real: $f(x) = x^2 - 3$.



A) $R(f) = [3; \infty[$
B) $R(f) = [-3; \infty[$
C) $R(f) =]3; \infty[$
D) $R(f) =]3; \infty]$
E) $R(f) =]4; \infty]$

Resolvemos los retos

Reto 1

Representamos el rectángulo.

Área del rectángulo: A = $b.h$

Si el largo y el ancho están en función de x, solo reemplazamos.

$$A(x) = (4x + 3)(2x - 5) = 8x^2 - 20x + 6x - 15$$

$$A(x) = 8x^2 - 14x - 15$$

Respuesta D

Reto 2

Tenemos la función $f(x) = x(40 - x) = 40x - x^2$.

Ordenamos.

$$f(x) = -x^2 + 40x = -(x^2 - 40x)$$

Resolvemos completando cuadrados.

$$f(x) = -[(x^2 - 40x + 400) - 400] = -[(x - 20)^2 - 400] = -(x - 20)^2 + 400$$

Para que f(x) sea máxima, x debe ser 20. Por lo tanto, se deben vender 20 bicicletas al mes para obtener una ganancia máxima.

Respuesta A

Reto 3

Calculamos el vértice de la parábola V(*h*.*k*) = V(*x*; *y*).

Para ello, debemos calcular $x = h = -b/2a$.

En la función $f(x) = x^2 - 3$, tenemos lo siguiente: $a = 1$ $b = 0$ y $c = -3$

Reemplazamos.

$h = -0/2(1) = 0$

Para hallar *k*, reemplazamos h en la función.

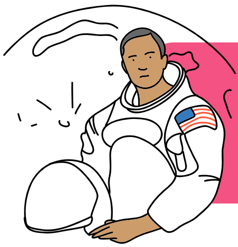
$f(x) = y = (0)^2 - 3 = -3$

Vértice: V (0; −3)

Observamos el gráfico. El punto más bajo de la parábola es el vértice, que está en el eje *y*, el cual es −3, y como se abre hacia arriba, los valores de *y* que corresponden al rango de la función serán mayores o iguales a −3.

Por lo tanto, el rango será el intervalo: [−3; ∞ [; también se puede expresar como [−3; ∞ >.

Respuesta B



Este es un pequeño paso para el hombre, pero un gran salto para la humanidad.

NEIL ARMSTRONG

PREPÁRATE

SESIÓN

23

Razonamiento Matemático

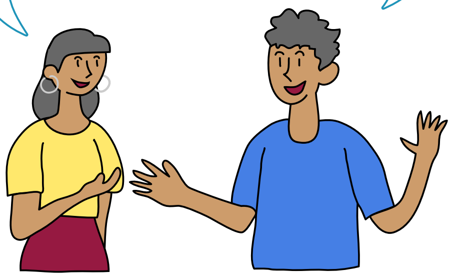
Funciones trigonométricas
(senos y cosenos)

PRONABEC

PERÚ Ministerio de Educación

Actividad: Aplicamos nuestros conocimientos de funciones trigonométricas para resolver problemas en la vida cotidiana

Funciones trigonométricas (senos y cosenos)



Recordamos conceptos básicos

Funciones trigonométricas

$f(x) = \text{sen}\, x$ o $f(x) = A\text{sen}\, Bx$ con A y B diferente de cero.

$f(x) = \cos x$ o $f(x) = A\cos Bx$ con A y B diferente de cero.

Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo: (c. o.: cateto opuesto; c. a.: cateto adyacente; h: hipotenusa)

sen α = c. o./h

cos α = c. a./h

tg α = c. o./c. a.

ctg α = c. a./c. o.

sec α = h/c. a.

csc α = h/c. o.

Funciones trigonométricas en el plano cartesiano: (x: eje x; y: eje y; r: radio vector, en el círculo unitario r = 1)

sen $\alpha = y/r$

cos $\alpha = x/r$

tg $\alpha = y/x$

ctg $\alpha = x/y$

cec $\alpha = r/x$

csc $\alpha = r/y$

Dado un triángulo oblicuángulo ABC con a, b, y c lados se cumple lo siguiente:

Ley de senos

$a/\text{sen}A = b/\text{sen}B = c/\text{sen}C$

Ley de cosenos

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\text{bc.cos}A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2\text{ac.cos}B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2\text{ab.cos}C$

Las funciones seno y coseno son periódicas y su periodo es 2 π.

Amplitud y periodo

Tanto para la función seno: f(x) = sen$x$, como para la función coseno: f(x) = cos$x$, el valor máximo es 1 y el valor mínimo es −1. Así, la amplitud de ambos es 1.

Cualquier función de la forma: f(x) = Asen$x$ o f(x) = Acos$x$ con A diferente de cero, es un senoide con periodo 2π y amplitud |A|.

Si f(x) = AsenBx o f(x) = AcosBx, con A y B diferente de cero, su gráfica es un senoide con amplitud $|A|$ y periodo $2\pi/|B|$.

Situaciones problemáticas

Situación problemática 1

Hallar el valor numérico de R.

$R = 4\sqrt{3}\ (\cos 2)30°\ \text{tg}\ 60° - \sqrt{6}\ \text{sen}\ 45°\text{ctg}\ 30° + 2\ \text{sen}\ 45°\cos 45°$

A) $12\sqrt{3} - 2$

B) $9\sqrt{3} - 2$

C) $6\sqrt{3} - 2$

D) $4\sqrt{3} - 2$

E) 10

Solución

Reemplazamos cada función trigonométrica por su valor teniendo en cuenta las razones de los ángulos notables.

$R = 4\sqrt{3}(\cos 2)30°\ \text{tg}\ 60° - \sqrt{6}\ \text{sen}\ 45°\ \text{ctg}\ 30° + 2\text{sen}\ 45°\ \cos 45°$

$R = 4\sqrt{3}\ (\sqrt{3}/2)2(\sqrt{3}) - \sqrt{6}(\sqrt{2}/2)(\sqrt{3}) + 2\ (\sqrt{2}/2)(\sqrt{2}/2)$

$R = 4\sqrt{3}\ (3) - \sqrt{6}(\sqrt{6}/2) + 2(2/4)$

$R = 12\sqrt{3} - 6/2 + 4/4$

$R = 12\sqrt{3} - 3 + 1$

$R = 12\sqrt{3} - 2$

Respuesta A

Situación problemática 2

Con un compás, cuyos brazos articulados miden 12 cm cada uno de ellos, se traza una circunferencia de 14 cm de diámetro. Calcular la amplitud del ángulo que forman entre sí los brazos articulados del compás en el momento de trazarlo.

A) 33°50´

B) 33°55´

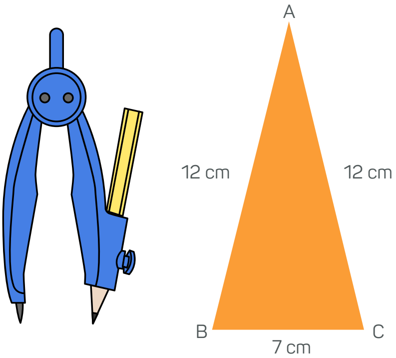
C) 34°50´

D) 34°55´

E) 35°55´

Solución

Representamos gráficamente la situación.



Resolvemos aplicando la ley de cosenos para hallar el ángulo A.

La ley de cosenos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(\cos A)$

Reemplazamos los datos.

$7^2 = 12^2 + 12^2 - 2(12)(12)\cos A$

$49 = 144 + 144 - 288\cos A$

$288\cos A = 288 - 49$

$288\cos A = 239$

$\text{Cos}A = 239/288$

$\text{Cos}A = 0{,}82986$

Se busca en la calculadora el valor y se sabe que el ángulo es 33°55´.

Luego, la abertura del compás es de 33°55´.

Respuesta B

Situación problemática 3

Si una persona se encuentra a 8 m de la base de un edificio y el ángulo de elevación desde el cual observa la parte superior de dicha construcción es de 60°, calcular la altura del edificio.

A) 12,45 m

B) 13,84 m

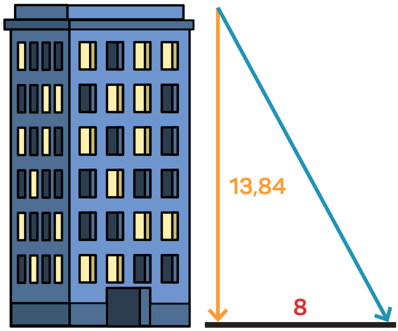
C) 14,98 m

D) 15,25 m

E) 16,75 m

Solución

Representamos gráficamente la situación.



Utilizamos la razón trigonométrica.

$$\text{tg } 60° = h/d$$

Si la tangente relaciona el cateto opuesto con el cateto adyacente en el triángulo rectángulo, reemplazamos.

$$h = \text{tg } 60°(d)$$
$$h = \sqrt{3}(8)$$
$$h = 1{,}73(8)$$
$$h = 13{,}84 \text{ m}$$

Respuesta B

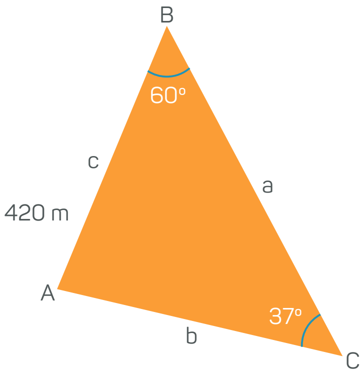
Situación problemática 4

Para medir el ancho de un río se toman dos puntos de observación en un mismo lado del río, el punto A y el B, los cuales distan entre sí 420 m. Además, existe otro punto referencial, el punto C, en la margen opuesta del río. Si el ángulo formado por AB y BC mide 60° y el ángulo formado por CA y CB mide 37°, ¿cuánto mide AC?

A) $350\sqrt{3}$ m
B) $360\sqrt{3}$ m
C) $370\sqrt{3}$ m
D) $380\sqrt{3}$ m
E) $390\sqrt{3}$ m

Solución

Representamos gráficamente la situación.



Tenemos dos ángulos y un lado como dato.

Podemos aplicar la ley de senos que se simboliza de la siguiente manera:

a/senA = b/senB = c/senC

Reemplazamos los datos c y b.

420/sen 37° = AC/sen 60°

Despejamos AC.

AC = 420(sen 60°)/sen 37°

AC = $420(\sqrt{3}/2)/3/5$

AC = $210\sqrt{3}/3/5$

AC = $5(210)\sqrt{3}/3$

AC = $5(70)\sqrt{3}$

AC = $350\sqrt{3}$ m

Respuesta A

Situación problemática 5

Un topógrafo observa la altura de $350\sqrt{3}$ m de una montaña sobre una llanura, con un ángulo de elevación de 30°. ¿Cuántos metros se debe acercar a la base de la montaña para que esta pueda ser observada con un ángulo de elevación de 60°?

A) 500 m

B) 550 m

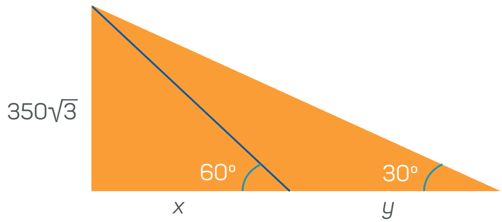
C) 600 m

D) 650 m

E) 700 m

Solución

Representamos gráficamente la situación.



Podemos resolverlo fácilmente. Relacionamos el lado opuesto y el lado adyacente al ángulo de 30°. Esa relación es la tangente de 30°.

$$\text{tg } 30° = 350\sqrt{3} \,/\, (x + y)$$
$$\sqrt{3}/3 = 350\sqrt{(3})/ \,(x + y)$$
$$\sqrt{3}/3(x + y) = 350\sqrt{3}$$
$$(x + y) = 350\sqrt{3} \,/\, \sqrt{3}/3$$
$$(x + y) = 3(350)$$
$$(x + y) = 1050 \text{ m}$$

Se quiere saber cuánto se acercó, es decir, la longitud. Para ello, trabajamos ahora con el ángulo de 60°.

$$\text{tg } 60° = 350\sqrt{3}/\, x$$
$$\sqrt{3} = 350\sqrt{3}/x$$
$$x = 350\sqrt{3} \,/\sqrt{3}$$
$$x = 350 \text{ m}$$

Calculamos la distancia que deberá acercarse a la base de la montaña.

$y = 1050 - 350$

$y = 700$ m

Respuesta E

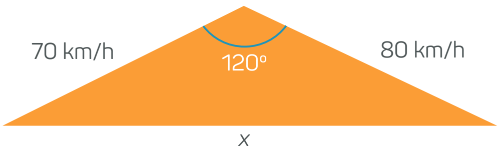
Situación problemática 6

Dos móviles parten simultáneamente de un mismo punto. Uno va a 70 km/h y el otro, a 80 km/h y sus direcciones forman un ángulo de 120°. Calcular la distancia a la que estarán separados al cabo de 2 horas.

A) 200 km
B) 220 km
C) 240 km
D) 260 km
E) 280 km

Solución

Representamos gráficamente la situación.



Aplicamos la ley de cosenos.

$x^2 = 140^2 + 160^2 - 2(140)(160)\,.\cos 120°$

$x^2 = 19\,600 + 25\,600 - 44\,800(-1/2)$

$x^2 = 45\,200 + 22\,400$

$x^2 = 67\,600$

$x = \sqrt{(67\,600)}$

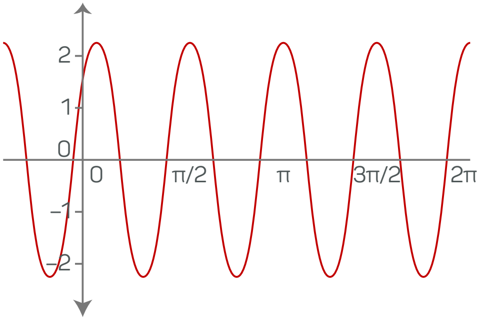
$x = 260$ km

Luego, se encuentran a una distancia de 260 km.

Respuesta D

Situación problemática 7

Halla la regla de correspondencia de una función tipo seno cuya gráfica es la siguiente:



A) f(*x*) = 4sen 4*x*

B) f(*x*) =1/2sen 4*x*

C) f(*x*) = 1/4sen 4*x*

D) f(*x*) = 2sen 4*x*

E) f(*x*) = sen 4*x*

Solución

Observamos la gráfica y vemos que es de la forma f(*x*)= *A*sen *Bx*. Analizamos la onda sinusoide. Su máximo valor en Y es 2 y su mínimo es −2, es decir, su amplitud es 2.

Observamos el ciclo de la onda. Empieza en 0 y termina en π/2.

Como el periodo de la función seno es 2π, para hallar *B* dividimos 2π/(π/2) = 4.

Por lo tanto, la regla de correspondencia es f(*x*) = 2sen 4*x*.

Respuesta D

Retos

Los retos son los desafíos que te impulsarán a desarrollar tus propias estrategias y permitirán verificar tus logros de aprendizaje. Para ello, tendrás que leer bien la situación (problema o ejercicio), comprenderla, analizar los datos, trazar un plan de acción y realizar las operaciones para comprobar luego el resultado. ¡Éxitos en tu proceso de aprendizaje!

Reto 1

Se desea medir la distancia entre las cimas de dos montañas de una cañada. Para ello, se elige un punto en el centro de la cañada y se mide con un teodolito la distancia hacia la cima de cada una de ellas, cuyo resultado es 150 m y 250 m, respectivamente. Si el ángulo que forman dichas medidas es 120°, calcular la distancia entre las cimas.

A) 100 m

B) 200 m

C) 250 m

D) 300 m

E) 350 m

Reto 2

Rosalía tiene un ejercicio de valor numérico de funciones trigonométricas:

$R = \text{sen}^2 45° - 3\cos^2 60° - 5\text{sen}^2 3000° - 5\text{sen } 37° + \text{sen}^2 270°$.

Como no puede resolverlo, pide a sus hermanos que la ayuden. Juan le dice: "No me gustan los cálculos, yo te doy los valores de las funciones, y Ramón hace los cálculos. ¿Qué te parece?". Ella le dice que está bien. Juan le da los valores: sen 45° = $\sqrt{2}/2$; cos 60°= ½; sen 3000° = sen 120° = sen 60° = $\sqrt{3}/2$; sen 37° = 3/5; y sen 270° = –1. Ramón hizo los cálculos y dio como resultado una de las siguientes alternativas. ¿Cuál fue la respuesta que dio?

A) 12

B) –2

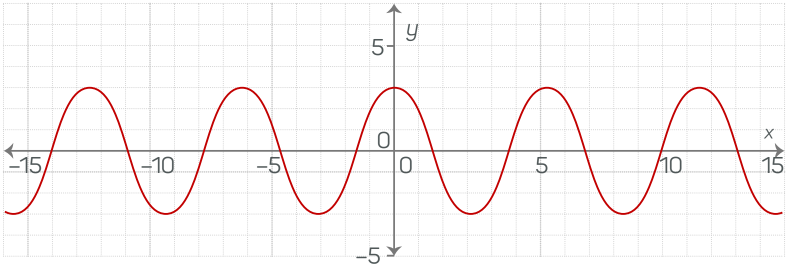
C) –12

D) –6

E) 4

Reto 3

Gráfica de la función f(x) = 3 cos(x):



Indicar el dominio y el rango de la función.

A) D(f) = R y R(f) = [–3; 3]

B) D(f) = R y R(f) = [–3; –3[

C) D(f) = R y R(f) =] 3; ∞[

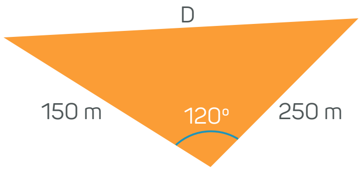
D) D(f) = R y R(f) =] 3; –3]

E) D(f) = R y R(f) =] ∞; –3]

Resolvemos los retos

Reto 1

Representamos gráficamente la situación.



Aplicamos la ley de cosenos.

$D^2 = 150^2 + 250^2 - 2(150)(250)\cos 120°$

Se observa que el cos 120° es negativo en el II cuadrante y al reducirlo al primer cuadrante es igual al cos 60°.

$D^2 = 22\ 500 + 62\ 500 - 300(250)(-\cos 60°)$

$D^2 = 85\ 000 + 75\ 000(1/2)$

$D^2 = 85\ 000 + 37\ 500$

$D^2 = 122\ 500$

$D = \sqrt{(122\ 500)}$

$D = 350$ m

Respuesta E

Reto 2

Reemplazamos los valores.

$R = \text{sen}^2\ 45° - 3\cos^2 60° - 5\text{sen}^2\ 3000° - 5\text{sen}\ 37° + \text{sen}^2\ 270°$

$R = (\sqrt{2}/2)^2 - 3(1/2)^2 - 5\ (\sqrt{3}/2)^2 - 5\ (3/5) + (-1)^2$

$R = 2/4 - 3/4 - 5\ (3/4) - 3 + 1$

$R = 1/2 - 3/4 - 15/4 - 2$

$R = -4 - 2 = -6$

Respuesta D

Reto 3

Analizamos la gráfica.

El $D(x) = R$, no hay parámetros, por lo tanto, x puede tomar cualquier valor de R.

En cuanto al Rango, vemos los valores que puede tomar en y. Estos valores van desde −3 hasta 3 y, por lo tanto, se da en forma de intervalo el rango: [−3; 3].

Respuesta A

El estudio profundo de la naturaleza es la fuente más fértil de descubrimientos matemáticos.

JEAN–BAPTISTE JOSEPH FOURIER

PREPÁRATE

SESIÓN
24

Razonamiento Matemático

Patrones geométricos

PRONABEC

PERÚ Ministerio de Educación

Actividad: Aplicamos nuestros conocimientos sobre patrones geométricos en situaciones de la vida cotidiana

Patrones geométricos

Recordamos conceptos básicos

Patrones geométricos

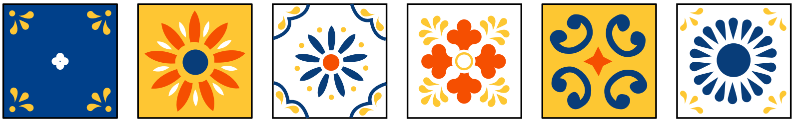
Son figuras geométricas que tienen la misma forma y se repiten en una serie. En muchas profesiones, la geometría es considerada una parte esencial. En efecto, en el diseño gráfico, especialmente, dichos patrones constituyen una herramienta increíble, ya que se utilizan para la creación de la marca y la decoración de espacios, con el objetivo de que estos sean estéticamente agradables, entre otros usos. En la arquitectura se emplean para realizar la división de los espacios y plasmarlos en los planos. Además, en la ingeniería se aplican conocimientos geométricos para diseñar y crear estructuras de manera segura.

El comportamiento de estos patrones geométricos es susceptible de ser expresado a través de una fórmula algebraica.

Situaciones problemáticas

Situación problemática 1

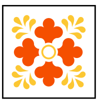
¿Qué dibujo sigue en la mayólica número 105?



A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

Solución

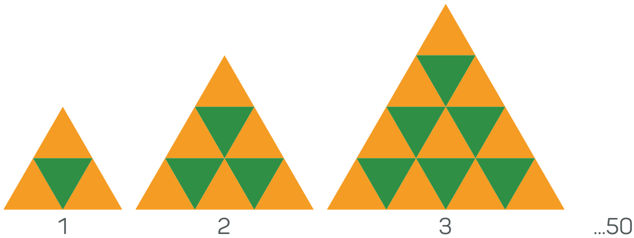
Observamos que la serie está compuesta de 6 mayólicas; por ello, cada 6 mayólicas se repite el ciclo. Entonces, dividimos 105 entre 6, y el resultado es 17 ciclos con 3 mayólicas.

Operacionalizamos 17 x 6 = 102 y comenzamos a contar desde el primero que se observa: 103, 104 y 105. La flor de pétalos de color azul es la que ocupa el lugar 105.

Respuesta C

Situación problemática 2

¿Cuántos triángulos verdes hay en la posición 50?



A) 2601
B) 2550
C) 1275
D) 735
E) 602

Solución

Analizamos lo siguiente:

1.ª posición: 2 de base, 3 marrones y 1 verde, 4 triángulos.

2.ª posición: 3 de base, 6 marrones y 3 verdes, 9 triángulos.

3.ª posición: 4 de base, 10 marrones y 6 verdes, 16 triángulos.

Para la posición 50 tenemos lo siguiente:

Base: 50 + 1 = 51

El número total de triángulos está en función al cuadrado de la base, entonces será $51^2 = 2601$.

Si observamos la diferencia entre los triángulos marrones y los verdes, podemos formar la siguiente ecuación:

$$M - V = 51$$

Sabemos que $M + V = 2601$.

Despejamos.

$$M = 2601 - V$$

Reemplazamos.

$M - V = 51$

$2601 - V - V = 51$

$2601 - 51 = 2V$

$2550 = 2V$

$2550/2 = V$

$V = 1275$

Respuesta C

Situación problemática 3

En la imagen anterior, ¿cuál es el total de contactos de las monedas que se observa?

A) 3

B) 9

C) 18

D) 30

E) 40

Solución

Esta es una distribución especial. Por ello, tenemos que analizar los gráficos que están siguiendo una secuencia o patrón de formación.

En la primera hay 3 monedas, y el número de contactos es 3.

En la segunda hay 6 monedas, y el número de contactos es 9.

En la tercera hay 10 monedas, y el número de contactos es 18.

Entonces, sumamos.

$3 + 9 + 18 = 30$

Luego, el total de contactos es 30.

Respuesta D

Situación problemática 4

Si en la base hubiera 6 monedas y se formara una pirámide, ¿cuántos contactos se producirían?

A) 15 contactos
B) 18 contactos
C) 21 contactos
D) 30 contactos
E) 45 contactos

Solución

Identificaremos la regla de correspondencia de la sucesión en función del número de monedas de la base.

Para ello, elaboraremos la siguiente tabla:

Número de monedas	3 + 3	6 + 4	10 + 5	15 + 6	21 + 7
Número de monedas en la base	2	3	4	5	6
Número de contactos	3	9	18	30	45

Respuesta E

Situación problemática 5

Si la base es 10 monedas, ¿cuál será el número total de contactos?

A) 150 contactos
B) 140 contactos
C) 135 contactos
D) 120 contactos
E) 100 contactos

Solución

Es necesario establecer una ley de formación, es decir, un patrón de formación.

Monedas de base	2	3	4	5	6
Número de contactos	3	9	18	30	45
	3(1)(2)/2	3(2)(3)/2	3(3)(4)/2	3(4)(5)/2	3(5)(6)/2

Deducimos que la ley de formación es $3(n-1)n/2$ donde n es el número de monedas que hay en la base.

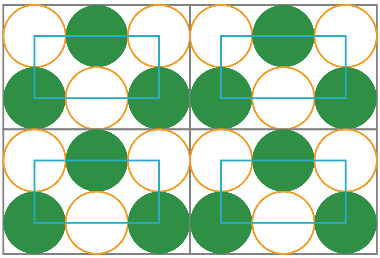
Entonces, si la base es 10 monedas, el número total de contactos es el siguiente:

$C = 3(10 - 1)(10)/2 = 135$

Respuesta C

Situación problemática 6

Si todos los círculos son iguales y el perímetro del rectángulo pequeño mide 72 cm, y tomando en cuenta que sus vértices son los centros de los círculos mostrados, hallar el área de los círculos sombreados.



A) 432 π cm²

B) 446 π cm²

C) 462 π cm²

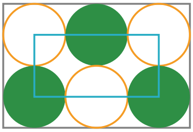
D) 482 π cm²

E) 492 π cm²

Solución

Vamos a resolver este problema. Tomamos el primer rectángulo como base, pues los otros son iguales, porque siguen el mismo patrón de formación.

Para ello analizamos el primero.



Perímetro: 72 cm, x es el largo y y es el ancho.

$P = 2(x + y)$ pero $x = 4r$ y $y = 2r$

$72 = 2(4r + 2r)$

$72 = 2(6r)$

$72 = 12r$

$6 = r$

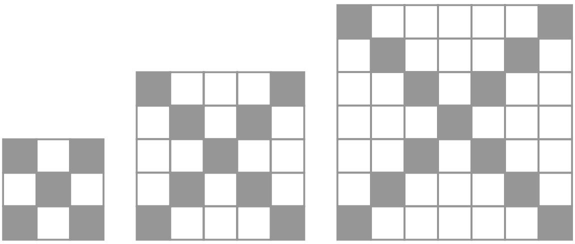
El radio del círculo es 6; por lo tanto, el área del círculo será $A = 6^2\pi = 36\pi$.

Tomando en cuenta que son 12 círculos sombreados, el área total será la siguiente:

$A = 12(36\pi) = 432\ \pi\ cm^2$

Respuesta A

Situación problemática 7



¿Cuál es el número de cuadrados blancos que hay en un cuadrado de 99 cuadraditos de base?

A) 9998

B) 9604

C) 9407

D) 9210

E) 9013

Solución

Analizamos las gráficas.

$1.^{er}$ cuadrado (3 de base) tiene un total de 9 cuadrados: 4 blancos y 5 negros.

2.° cuadrado (5 de base) tiene un total de 25 cuadrados: 16 blancos y 9 negros.

$3.^{er}$ cuadrado (7 de base) tiene un total de 49 cuadrados: 36 blancos y 13 negros.

Calculamos el total: $99 \times 99 = 9801$.

Los cuadrados negros siempre están en las diagonales y estas son dos, el número en cada diagonal coincide con el número de la base, pero como uno se repite descontamos.

Entonces, la fórmula para hallar el número de cuadrados negros es el siguiente:
$2(n) - 1$, donde n es el número de cuadrados de base.

Si son 99, entonces los cuadrados negros serán $2(99) - 1 = 198 - 1 = 197$.

Para hallar el número de cuadrados negros, realizamos una resta.
$9801 - 197 = 9604$

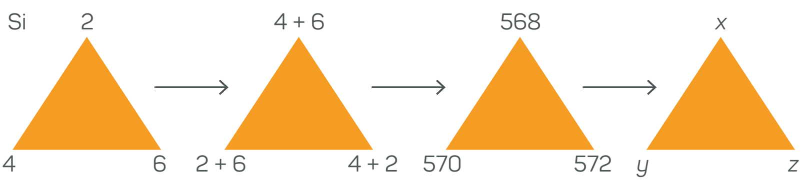
Respuesta B

Retos

Los retos son los desafíos que te impulsarán a desarrollar tus propias estrategias y permitirán verificar tus logros de aprendizaje. Para ello, tendrás que leer bien la situación (problema o ejercicio), comprenderla, analizar los datos, trazar un plan de acción y realizar las operaciones para comprobar luego el resultado. ¡Éxitos en tu proceso de aprendizaje!

Reto 1

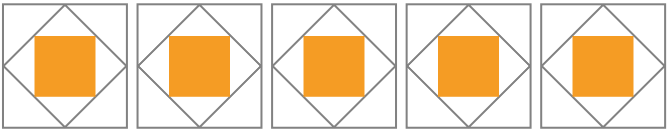
Si $M = (x + y) - z$, calcular el valor de M siguiendo el patrón de comportamiento.



A) 2288
B) 1244
C) 1144
D) 1136
E) 1028

Reto 2

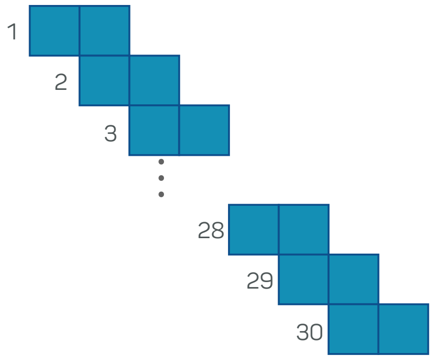
Se tiene la siguiente secuencia de 5 cuadrados grandes, y cada uno de los cuadrados interiores se ha formado uniendo los puntos medios de los lados del cuadrado que le antecede. Si el lado del cuadrado mayor es $2\sqrt{2}$ cm, calcular la razón entre el área blanca y el área sombreada.



A) 1/4
B) 3
C) 4
D) 1/3
E) 1/5

Reto 3

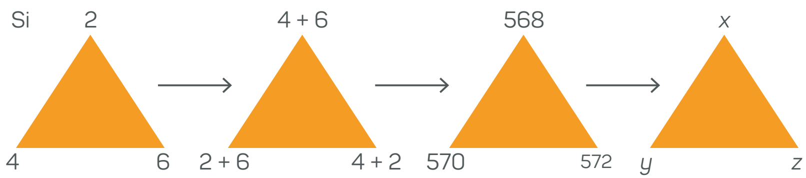
¿Cuántos cuadriláteros se pueden contar en la siguiente figura?



A) 120
B) 119
C) 118
D) 130
E) 145

Resolvemos los retos

Reto 1



Observamos cómo se forma la secuencia.

En el segundo triángulo, en cada vértice, se coloca el número que es la suma de los otros dos vértices; por lo tanto, en el cuarto triángulo se cumple el mismo patrón.

$x = 570 + 572 = 1142$

$y = 568 + 572 = 1140$

$z = 570 + 568 = 1138$

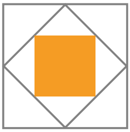
$M = (x + y) - z$

$M = 1142 + 1140 - 1138$

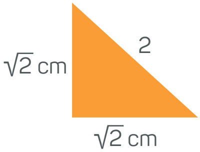
$M = 1144$

Respuesta C

Reto 2

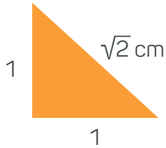


Hallamos el lado del cuadrado intermedio tomando uno de los triángulos formados donde la hipotenusa es el lado del cuadrado intermedio.



Aplicamos el teorema de Pitágoras y el lado es 2.

Ahora, hallamos el lado del cuadrado pequeño y tomamos uno de los triángulos laterales.



Aplicamos nuevamente el teorema de Pitágoras y el resultado es el lado $\sqrt{2}$ cm.

Ahora, el área del cuadrado menor es $A = (\sqrt{2})^2 = 2$.

Ahora, buscamos la relación entre las áreas totales.

Cuadrado mayor: $A = (2\sqrt{2})^2 = 4(2) = 8$

Área blanca: $8 - 2 = 6$

$6 \times 5 = 30$

Área sombreada: $A = 2$

$2 \times 5 = 10$

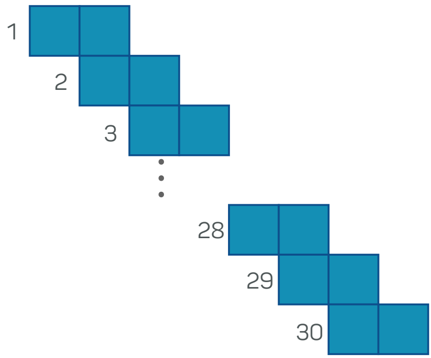
Razón: 30/10

Razón = 3

Respuesta B

Reto 3

Veamos la formación.



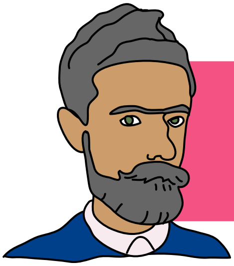
Si contamos los cuadrados horizontales de 1, el resultado es 60.

Ahora, observamos 30 cuadriláteros horizontales formados por dos cuadraditos cada uno de ellos.

También observamos 29 cuadriláteros verticales formados por dos cuadraditos cada uno de ellos.

En total tendremos 60 + 30 + 29 = 119.

Respuesta B



Solo quien intenta lo absurdo consigue lo imposible

MAURITS CORNELIS ESCHER